

数学 1

第 1 問

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - 5y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

の解は

$$x = (\text{アイ}) + (\text{ウ})\sqrt{6}, y = (\text{エオ}) + \sqrt{6}$$

である。 x, y がこの値のとき

$$\frac{2 - |x|}{|y|} = \frac{(\text{カ}) + \sqrt{6}}{(\text{キ})}$$

であるから $m \leq \frac{2 - |x|}{|y|} < m + 1$ を満たす整数 m は (ク) である。

連立方程式は普通に解いて

$$x = -5 + 2\sqrt{6}, y = -2 + \sqrt{6}$$

x の絶対値を取るために 5 と $2\sqrt{6}$ の大小関係を調べる。

$$5^2 = 25 > (2\sqrt{6})^2 = 24 \Rightarrow 5 > 2\sqrt{6} \Rightarrow |x| = 5 - 2\sqrt{6}$$

y についても同様に

$$2^2 = 4 < (\sqrt{6})^2 = 6 \Rightarrow 2 < \sqrt{6} \Rightarrow |y| = -2 + \sqrt{6}$$

以上から

$$\begin{aligned} \frac{2 - |x|}{|y|} &= \frac{2 - (5 - 2\sqrt{6})}{-2 + \sqrt{6}} \\ &= \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{-2 + \sqrt{6}} \\ &= \frac{(-3 + 2\sqrt{6})(-2 - \sqrt{6})}{(-2 + \sqrt{6})(-2 - \sqrt{6})} \\ &= \frac{6 + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$\frac{6 + \sqrt{6}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ で $1 < \frac{\sqrt{6}}{2} < 2$ より $m \leq \frac{2 - |x|}{|y|} = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2} < m + 1$ を満たす整数 m は $m = 4$ である。

(2) 長方形 $ABCD$ において、 $AB = CD = 8$, $BC = DA = 12$ とする。辺 AB 上に点 P , 辺 BC 上に点 Q , 辺 CD 上に点 R

$$AP = BQ = CR$$

となるようにとり、 $AP = x$ とおく ($0 < x < 8$)。このとき、台形 $PBCR$ の面積は (ケコ) である。また、 $\triangle PQR$ の面積 S は

$$S = x^2 - (\text{サシ})x + (\text{スセ})$$

である。 $S < 24$ となる x の範囲は

$$(\text{ソ}) < x < (\text{タ})$$

である。

$PBCR$ は台形であるが、上底は PB 、下底は CR 、高さは BC にあたる。 $PB = 8 - x$, $CR = x$, $BC = 12$ より $PBCR$ の面積は

$$(8 - x + x) \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 48$$

また $\triangle PBQ$ の面積は $\frac{(8-x)x}{2}$, $\triangle RQC$ の面積は $\frac{(12-x)x}{2}$ となることから $\triangle RQC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} 48 - \left(\frac{(8-x)x}{2} + \frac{(12-x)x}{2} \right) &= 48 - (10-x)x \\ &= x^2 - 10x + 48 \end{aligned}$$

$S = x^2 - 10x + 48 < 24$ のとき

$$x^2 - 10x + 48 - 24 = x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6) < 0$$

となるので、 $S < 24$ となる x の範囲は $4 < x < 6$