数学１

第３問

$\triangle ABC$ において、$AB=7, BC=4\sqrt{2}, \angle ABC=45^\circ$ とする。
また $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。
このとき $CA=$（ア）であり、外接円 O の半径は $\dfrac{（イ）}{（ウ）}\sqrt{（エ）}$ である。
下の（オ）には次の０～３のうち当てはまるものを一つ選べ。

０．ＡＣ　１．ＡＤ　２．ＢＣ　３．ＢＤ

外接円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ の面積比が $7:2$ であるようにとる。このとき $\angle BAD=\angle BCD$ であるから、$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ の面積比は $AB\cdot AD$ と（オ）$\cdot CD$ の比に等しい。
このことより

$$AD=（カ）\sqrt{（キ）}CD$$

である。また、$\triangle ADC$ において $\angle ADC=（クケ）^\circ$ であるから

$$CD=\sqrt{（コ）}, AD=（サ）\sqrt{（シス）}$$

である。点 C から辺 AD に下ろした垂線を CH とすると

$$CH=\frac{\sqrt{（セソ）}}{（タ）}$$

であり、$\triangle ADC$ を直線 AD を軸として１回転してできる立体の体積は

$$\frac{（チ）}{（ツ）}\sqrt{（テト）}\pi$$

である。

余弦定理から

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos(\angle ABC) \\ &= 49+32-2\times 7\times 4\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 25 \end{aligned}$$

$AC>0$ より $AC=5$ である。また正弦定理から外接円 O の半径は

$$\frac{1}{2}\times\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$\triangle ABD$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times AB\sin\angle BAD\times AD$$

となる。同じく $\triangle CBD$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times CD\sin\angle BCD\times BC$$

である。問題の条件から

$$\left(\frac{1}{2} \times AB\sin\angle BAD \times AD\right) : \left(\frac{1}{2} \times CD\sin\angle BCD \times BC\right) = 7:2$$

となる。ここで $\angle BAD = \angle BCD$ より

$$AB \cdot AD : CD \cdot BC = 7:2$$

このことから

$$\begin{aligned} 2AB \cdot AD &= 7BC \cdot CD \\ 14AD &= 28\sqrt{2}CD \\ AD &= 2\sqrt{2}CD \end{aligned}$$

$\angle ADC = \angle ABC = 45^\circ$ より $\triangle ACD$ について余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos(\angle ADC) \\ 25 &= 8CD^2 + CD^2 - 2 \times 2\sqrt{2}CD \times CD \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 25 &= 5CD^2 \end{aligned}$$

よって $CD^2 = 5$ つまり $CD = \sqrt{5}, AD = 2\sqrt{10}$ である。
点 C から辺 AD に下ろした垂線を CH とすると

$$CH = CD \times \sin\angle ADC = \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$\triangle ADC$ を直線 AD を軸として１回転してできる立体は２つの円錐を底面の円で合わせた形をしている。２つの円錐の底面はともに CH を半径とする円で高さはそれぞれ AH, DH である。よって体積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \pi\ CH^2 \times AH + \frac{1}{3} \times \pi\ CH^2 \times DH \\ =\ & \frac{1}{3} \times \pi\ CH^2 \times (AH + DH) \\ =\ & \frac{1}{3} \times \pi\ CH^2 \times AD \\ =\ & \frac{1}{3} \times \pi\ \frac{5}{2} \times 2\sqrt{10} \\ =\ & \frac{5}{3}\sqrt{10}\ \pi \end{aligned}$$