

数学 1

第 4 問

$P = x(x+3)(2x-3)$  とする。また  $a$  を定数とする。

$x = a+1$  のときの  $P$  の値は

$$2a^3 + (\text{ア})a^2 + (\text{イ})a - (\text{ウ})$$

である。

$x = a+1$  のときの  $P$  の値と、 $x = a$  のときの  $P$  の値が等しいとする。このとき  $a$  は

$$3a^2 + (\text{エ})a - (\text{コ}) = 0$$

を満たす。したがって

$$a = \frac{(\text{カキ}) \pm \sqrt{(\text{クケ})}}{(\text{コ})} + 1$$

である。特に

$$x = \frac{(\text{カキ}) - \sqrt{(\text{クケ})}}{(\text{コ})} + 1$$

のときの  $P$  の値と

$$x = \frac{(\text{カキ}) - \sqrt{(\text{クケ})}}{(\text{コ})}$$

のときの  $P$  の値は等しく、その値は

$$(\text{サ}) + \frac{(\text{シス})\sqrt{(\text{セソ})}}{(\text{タ})}$$

である。

$x = a+1$  を代入すると  $P$  の値は

$$\begin{aligned} (a+1)(a+4)(2a-1) &= (a^2+5a+4)(2a-1) \\ &= 2a^3+9a^2+3a-4 \end{aligned}$$

また

$$a(a+3)(2a-3) = 2a^3+3a^2-9a$$

であることから  $x = a+1$  のときの  $P$  の値と、 $x = a$  のときの  $P$  の値が等しいとき

$$\begin{aligned} 2a^3+9a^2+3a-4 &= 2a^3+3a^2-9a \\ 6a^2+12a-4 &= 0 \\ 3a^2+6a-2 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}$$

特に

$$x = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}$$

のときの  $P$  の値は直接代入をせず、まず次の式の変形を行う。

$$2x^3 + 3x^2 - 9x = \frac{1}{3}(2x - 1)(3x^2 + 6x - 2) - \frac{17}{3}x - \frac{2}{3}$$

$x = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}$  より  $3x^2 + 6x - 2 = 0$  が成り立つため、 $P$  の値は

$$\begin{aligned} -\frac{17}{3} \left( \frac{-3 - \sqrt{15}}{3} \right) - \frac{2}{3} &= \frac{17}{3} + \frac{17\sqrt{15}}{9} - \frac{2}{3} \\ &= 5 + \frac{17\sqrt{15}}{9} \end{aligned}$$