

数学 1 A

第 1 問

(1) 長方形 $ABCD$ において、 $AB = CD = 8$, $BC = DA = 12$ とする。辺 AB 上に点 P , 辺 BC 上に点 Q , 辺 CD 上に点 R

$$AP = BQ = CR$$

となるようにとり、 $AP = x$ とおく ($0 < x < 8$)。このとき、台形 $PBCR$ の面積は (ケコ) である。また、 $\triangle PQR$ の面積 S は

$$S = x^2 - (\text{サシ})x + (\text{スセ})$$

である。 $S < 24$ となる x の範囲は

$$(\text{ソ}) < x < (\text{タ})$$

である。

$PBCR$ は台形であるが、上底は PB 、下底は CR 、高さは BC にあたる。 $PB = 8 - x$, $CR = x$, $BC = 12$ より $PBCR$ の面積は

$$(8 - x + x) \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 48$$

また $\triangle PBQ$ の面積は $\frac{(8-x)x}{2}$, $\triangle RQC$ の面積は $\frac{(12-x)x}{2}$ となることから $\triangle RQC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} 48 - \left(\frac{(8-x)x}{2} + \frac{(12-x)x}{2} \right) &= 48 - (10-x)x \\ &= x^2 - 10x + 48 \end{aligned}$$

$S = x^2 - 10x + 48 < 24$ のとき

$$x^2 - 10x + 48 - 24 = x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6) < 0$$

となるので、 $S < 24$ となる x の範囲は $4 < x < 6$

(2) 次の(ケ)～(シ)に当てはまるものを、下の4つのうちから1つずつ選べ。

自然数 m, n について、条件 p, q, r を次のように定める。

$p: m+n$ は 2 で割り切れる。

$q: n$ は 4 で割り切れる。

$r: m$ は 2 で割り切れ、かつ n は 4 で割り切れる。

また条件 p の否定を $\bar{p}$ 、条件 r の否定を $\bar{r}$ で表す。このとき

p は r であるための(ケ)

$\bar{p}$ は $\bar{r}$ であるための(コ)

「 p かつ q 」は r であるための(サ)

「 p または q 」は r であるための(シ)

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが、十分条件でない。
3. 十分条件であるが、必要条件でない。
4. 必要条件でも十分条件でもない。

p の条件「 $m+n$ は 2 で割り切れる」が成り立つための必要十分条件は「 m, n がともに偶数」または「 m, n がともに奇数」である。

m, n がともに奇数であるとき、条件 p は成り立つが条件 r は成り立たない。よって、 $p \Rightarrow r$ は成り立たない。

一方 m が 2 で割り切れ、かつ n が 4 で割り切れるとき、 m, n はともに偶数であるため条件 p が成り立つ。よって、 $r \Rightarrow p$ は成り立つ。以上から p は r であるための必要条件であるが、十分条件でない。

同じように $\bar{p}$ と $\bar{r}$ の関係を考えることもできるが、対偶を考えると

$p \Rightarrow r$ は成り立たないため $\bar{r} \Rightarrow \bar{p}$ も成り立たない。

また $r \Rightarrow p$ は成り立つため $\bar{p} \Rightarrow \bar{r}$ も成り立つ。

以上から $\bar{p}$ は $\bar{r}$ であるための十分条件であるが必要条件でない。

「 p かつ q 」であるための必要十分条件は「 n は 4 で割り切れ、 m は偶数、つまり 2 で割り切れる」である。この条件は r そのものであることから「 p かつ q 」は r であるための必要十分条件である。

「 p または q 」が成り立つ場合として $m = n = 1$ がある(q は成り立たないが p は成り立つ)しかしこのとき条件 r は成り立たないので「 p または q 」 $\Rightarrow r$ は成り立たない。一方 $r \Rightarrow$ 「 p かつ q 」であったため $r \Rightarrow$ 「 p または q 」も成り立つ。以上から「 p または q 」は r であるための必要条件であるが十分条件でない。