数学１Ａ

第３問

$\triangle ABC$ において、$AB=7, BC=4\sqrt{2}, \angle ABC=45^\circ$ とする。
また $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。
このとき $CA=$（ア）であり、外接円 O の半径は $\dfrac{(\text{イ})}{(\text{ウ})}\sqrt{(\text{エ})}$ である。
外接円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $CD=\sqrt{10}$ であるようにとる。$\angle ADC=$（オカ）$^\circ$ であるから、$AD=x$ とすると、x は２次方程式

$$x^2-(\text{キ})\sqrt{(\text{ク})}x-(\text{ケコ})=0$$

を満たす。$x>0$ であるから $AD=(\text{サ})\sqrt{(\text{シ})}$
下の（ス）（セ）（ツ）には次の０～５のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。

０．ＡＣ　　１．ＡＤ　　２．ＡＥ　　３．ＢＡ　　４．ＣＤ　　５．ＥＤ

点 A における外接円 O の接線と辺 DC の延長の交点を E とする。このとき $\angle CAE=\angle(\text{ス})E$ であるから、$\triangle ACE$ と $\triangle D$（セ）は相似である。これより

$$EA=\frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})}\sqrt{(\text{チ})}EC$$

である。また $EA^2=(\text{ツ})\cdot EC$ である。したがって

$$EA=\frac{(\text{テト})}{(\text{ナ})}\sqrt{(\text{ニ})}$$

である。$\triangle ACE$ の面積は $\dfrac{(\text{ヌネ})}{(\text{ノ})}$ である。

余弦定理から

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos(\angle ABC)\\
&= 49+32-2\times 7\times 4\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= 25
\end{aligned}$$

$AC>0$ より $AC=5$ である。また正弦定理から外接円 O の半径は

$$\frac{1}{2}\times\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

外接円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $CD=\sqrt{10}$ であるようにとる。このとき $\angle ADC=\angle ABC=45^\circ$ より余弦定理を使い

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AD^2+DC^2-2\times AD\times DC\times\cos(\angle ADC)\\
25 &= x^2+10-2\times\sqrt{10}x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\
25 &= x^2-2\sqrt{5}x+10
\end{aligned}$$

よって

$$x^2-2\sqrt{5}x-15=0$$

が成り立つ。$x^2-2\sqrt{5}x-15=(x+\sqrt{5})(x-3\sqrt{5})$ で $x>0$ より $x=3\sqrt{5}$ となる。

点 A における外接円 O の接線と辺 DC の延長の交点を E とする。このとき接弦定理から $\angle CAE=\angle ADE$ である。また、$\angle CEA=\angle AED$ となる。２つの角が等しいことから $\triangle ACE$ と $\triangle DAE$ は相似である。これより

$$EC:EA=AC:DA\Rightarrow EA=\frac{DA}{AC}EC=\frac{3\sqrt{5}}{5}EC$$

また

$$EC:EA=AE:DE\Rightarrow EA^2=DE\times EC$$

この２つの式から

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}EC\right)^2=DE\times EC\\ \Rightarrow\quad &\frac{9}{5}EC=DE=\sqrt{10}+CE\\ \Rightarrow\quad &EC=\frac{5}{4}\sqrt{10}\end{aligned}$$

よって

$$EA=\frac{3\sqrt{5}}{5}EC=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

以上から $\triangle ACE$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times AE\times AC\times\sin\angle CAE=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\sqrt{2}\times 5\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{75}{8}$$