

数学 1 A

第 4 問

さいころを 3 回投げ、次の規則にしたがって文字の列を作る。ただし、何も書かれていないときや文字が一つだけのときも文字の列と呼ぶことにする。

1 回目は次のようにする。

- 出た目の数が 1, 2 のときは、文字 A を書く
- 出た目の数が 3, 4 のときは、文字 B を書く
- 出た目の数が 5, 6 のときは、何も書かない

2 回目、3 回目は次のようにする。

- 出た目の数が 1, 2 のときは、文字の列の右側に文字 A を 1 つ付け加える
- 出た目の数が 3, 4 のときは、文字の列の右側に文字 B を 1 つ付け加える
- 出た目の数が 5, 6 のときは、一番右側の文字を削除する。ただし何も書かれていないときはそのままにする

以下の問では、サイコロを 3 回投げ終わったときにできる文字の列について考える。

(1) 文字の列が A A A となるさいころの目の出方は (ア) 通りである。

文字の列が A B となるさいころの目の出方は (イ) 通りである。

(2) 文字の列が A となる確率は $\frac{(\text{ウ})}{(\text{エオ})}$ であり、何も書かれていない文字の列となる確率は $\frac{(\text{カ})}{(\text{キク})}$ である。

(3) 文字の列の字数が 3 となる確率は $\frac{(\text{ケ})}{(\text{コサ})}$ であり、字数が 2 となる確率は $\frac{(\text{シ})}{(\text{スセ})}$ である。また、文字の列の字数の期待値は $\frac{(\text{ソタ})}{(\text{チ})}$ である。ただし何も書かれていないときの字数は 0 とする。

次の表を作る。

2 回目 1 回目	1 or 2	3 or 4	5 or 6
1	AAA	ABA	A
or	AAB	ABB	B
2	A	A	()
3	BAA	BBA	A
or	BAB	BBB	B
4	B	B	()
5	AA	BA	A
or	AB	BB	B
6	()	()	()

1 回目と 2 回目に出たさいころの目で表の位置を決め、各マスの文字列は上から 3 回目に出たサイコロの目が「1, 2」「3, 4」「5, 6」である場合の文字列に対応する。「()」は文

字の無い文字列を表す。

例えば 1 回目が 1、2 回目が 3、3 回目が 1 の場合、

$$A \rightarrow AB \rightarrow ABA$$

となり、表の上中央のマスの上の文字列「ABA」になる。また、1 回目が 4、2 回目が 5、3 回目が 1 の場合、

$$B \rightarrow (\text{削除}) \rightarrow A$$

表の中央右のマスの上の文字列「A」になる。

表の各文字列の現れるサイコロの目の出方は 8 通りで、確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$ である。

文字の列が A A A となる場合は左上マスの上の場合しかいないため、さいころの目の出方は 8 通り。同じく文字の列が A B となる場合は左下マスの中央の場合しかいないため、さいころの目の出方は 8 通り。

文字の列が A となる場合は表の中には 5 個あるため、確率は $\frac{5}{27}$

同じく、何も書かれていない文字の列となる場合は表の中には 5 個あるため、確率は $\frac{5}{27}$

表から文字の列の字数とその字数になる確率をまとめると表のようになる。

字数	3	2	1	0
確率	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{5}{27}$

この表から期待値を計算すると

$$3 \times \frac{8}{27} + 2 \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{10}{27} + 0 \times \frac{5}{27} = \frac{14}{9}$$