数学２

第１問

(1) 実数 $x, y$ は

$$3^{1+\log_{10} x} - 5^y = 1 \ \cdots (*)$$

を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x}$$

の最小値を求めよう。

　真数の条件により $x >$（ア）である。ただし対数 $\log_a b$ に対し、$a$ を底といい、$b$ を真数という。次に、(*) により

$$5^y = (\text{イ}) \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$$

である。$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと、$5^y > 0$ であるから、$z$ のとりうる値の範囲は

$$z > \frac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$$

となる。さらに

$$K = z + \frac{(\text{オ})}{z} - \frac{1}{(\text{カ})}$$

となるから、$K$ は $z =$（キ）のとき、最小値 $\frac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$ をとる。このとき、$x =$（コ）, $y = \log_{(\text{サ})}(\text{シ})$ である。

---

真数は常に正でなければいけないので、$x > 0$
式 (*) から

$$\begin{aligned} 5^y &= 3^{1+\log_{10} x} - 1 \\ &= 3 \cdot 3^{\log_{10} x} - 1 \end{aligned}$$

$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと、$5^y = 3z - 1$ となる。$5^y = 3z - 1 > 0$ であるから、$z$ のとりうる値の範囲は $z > \frac{1}{3}$ である。
一方、$K$ を変形すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x} \\ &= \frac{3z-1}{3} + \frac{1}{z} \\ &= z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで相加相乗平均の定理を使うと $z > 0$ より

$$K = z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \geq 2\sqrt{z \times \frac{1}{z}} - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

となるため、$K$ は $z = \frac{1}{z}$ つまり $z = 1$ のとき最小値 $\frac{5}{3}$ をとる。このとき $z = 3^{\log_{10} x}$ より $\log_{10} x = 0$ となり、$x = 1$, $5^y = 3z - 1 = 2$ より $y = \log_5 2$ となる。

(2) $a$ を正の定数とする。点 $O$ を原点とする座標平面において、中心が $O$ で、半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ $C_1, C_2$ とする。$\theta \geq 0$ を満たす実数 $\theta$ に対して、角 $a\theta$ の動径と $C_1$ との交点を $P$ とし、角 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ の動径と $C_2$ との交点を $Q$ とする。ここで、動径は $O$ を中心とし、その始線は $x$ 軸の正の部分とする。

(1) $\theta = x$ のとき $Q$ の座標は $\left(\sqrt{(\text{ス})}, (\text{セ})\right)$ である。

(2) 3点 $O, P, Q$ がこの順に一直線上にあるような最小の $theta$ の値は

$$\frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})a + (\text{チ})}\pi$$

である。$\theta$ が

$$0 \leq \theta \leq \frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})a + (\text{チ})}\pi$$

の範囲を動くとき、円 $C_2$ において点 $Q$ の軌跡を弧とする扇形の面積はである。

$$\frac{(\text{ツ})}{(\text{テ})a + (\text{ト})}\pi$$

(3) 線分 $PQ$ の長さの2乗 $PQ^2$ は

$$(\text{ナ}) - (\text{ニ})\sin\left(\frac{(\text{ヌ})a + (\text{ネ})}{(\text{ノ})}\theta\right)$$

である。

(4) $x$ の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (\text{ナ}) - (\text{ニ})\sin\left(\frac{(\text{ヌ})a + (\text{ネ})}{(\text{ノ})}x\right)$$

とおき、$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが $4\pi$ であるとすると、$a = \dfrac{(\text{ハ})}{(\text{ヒ})}$ である。

---

$\theta = \pi$ のとき $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ より点 $Q$ の座標は $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

3点 $O, P, Q$ がこの順に一直線上にある場合、$a\theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ でなければいけない。これより

$$\frac{3a+1}{3}\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3}{6a+2}\pi$$

である。$\theta$ が

$$0 \leq \theta \leq \frac{3}{6a+2}\pi$$

の範囲を動くとき、$OQ$ を含む動径は角 $\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{3a}{6a+2}\pi$ まで動く。これより点 $Q$ の軌跡を弧とする扇形の面積は

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3a}{6a+2}\pi\right) \times 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3a+1}\pi$$

となる。

三角形 $OPQ$ において $OP=1$, $OQ=2$, $\angle POQ=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}-a\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3a+1}{3}\theta$ であることから余弦定理を使い

$$\begin{aligned} PQ^2 &= OP^2+OQ^2-2\times OP\times OQ\times\cos(\angle POQ) \\ &= 1+4-2\times1\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3a+1}{3}\theta\right) \\ &= 5-4\sin\left(\frac{3a+1}{3}\theta\right) \end{aligned}$$

となる。

関数

$$f(x)=5-4\sin\left(\frac{3a+1}{3}x\right)$$

の正の周期のうち最小のものが $4\pi$ であるとき、$\dfrac{3a+1}{3}=\dfrac{1}{2}$ でなければいけない。よって $a=\dfrac{1}{6}$