数学２

第２問

$a$ を正の実数とし、$x$ の２次関数 $f(x),\, g(x)$ を

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{8}x^2 \\ g(x) &= -x^2+3ax-2a^2 \end{aligned}$$

とする。また、放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ $C_1, C_2$ とする。

(1) $C_1$ と $C_2$ の共有点を $P$ とすると、点 $P$ の座標は $\left(\frac{(ア)}{(イ)}a, \frac{(ウ)}{(エ)}a^2\right)$ である。また、点 $P$ における $C_1$ の接線の方程式は

$$y=\frac{(オ)}{(カ)}ax-\frac{(キ)}{(ク)}a^2$$

である。

(2) $C_1$ と $x$ 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\frac{(ケ)}{(コ)}$ である。また、$C_2$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は（サ）, （シス）であり、$C_2$ と $x$ 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{(セ)}{(ソ)}a^2$ である。

(3) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で、２つの放物線 $C_1,\, C_2$ と２直線 $x=0,\, x=2$ で囲まれた図形を $R$ とする。$R$ の中で、$y \geq 0$ を満たす全ての部分の面積 $S(a)$ は

$0 < a \leq$ （タ）のとき $S(a)=-\frac{(セ)}{(ソ)}a^2+\frac{(ケ)}{(コ)}$

（タ）$< a \leq$ （チ）のとき $S(a)=-\frac{(ツ)}{(テ)}a^3+(ト)a^2-(ナ)a+(ニ)$

（チ）$< a$ のとき $S(a)=\frac{(ケ)}{(コ)}$

したがって、$a$ が $a>0$ の範囲を動くとき、$S(a)$ は $a=\frac{(ヌ)}{(ネ)}$ で最小値 $S(a)=\frac{(ノ)}{(ハヒ)}$ をとる。

---

共有点の $x$ 座標を $t$ とおくと $f(t)=g(t)$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} 0=f(t)-g(t) &= \frac{9}{8}t^2-3at+2a^2 \\ &= -\frac{1}{8}(3t-4a)^2 \end{aligned}$$

よって $t=\frac{4}{3}a$ となり共有点 $P$ の座標は $\left(\frac{4}{3}a,\ \frac{2}{9}a^2\right)$

$f'(x)=\frac{1}{4}x$ より点 $P$ における $C_1$ の接線の傾きは $\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}a=\frac{1}{3}a$。点 $P$ を通ることから接線

の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right)+\frac{2}{9}a^2 \\ &= \frac{1}{3}ax-\frac{2}{9}a^2 \end{aligned}$$

$C_1$ と $x$ 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^2 \frac{1}{8}x^2dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^2=\frac{1}{3}$$

一方 $-x^2+3ax-2a^2=-(x-2a)(x-a)$ より $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $a, 2a$. よって $C_2$ と $x$ 軸で囲まれた図形の面積は

$$-\int_a^{2a}(x-2a)(x-a)dx$$

となる。ここで $s=x-\dfrac{3}{2}a$ と変数変換をすると、$ds=dx$ より

$$\begin{aligned} -\int_a^{2a}(x-2a)(x-a)dx &= -\int_{-a/2}^{a/2}(t-\frac{1}{2}a)(t+\frac{1}{2}a)dt \\ &= -2\int_0^{a/2}(t^2-\frac{1}{4}a^2)dt \\ &= -2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}a^2t\right]_0^{a/2} \\ &= -2\left(\frac{1}{3}\times\frac{a^3}{8}-\frac{1}{4}a^2\times\frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$0\leq x\leq 2$ の範囲で、2 つの放物線 $C_1, C_2$ と 2 直線 $x=0,\ x=2$ で囲まれた図形を $R$ とする。上で考えた $C_1$ と $x$ 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形を $A_1$, $C_2$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $A_2$ とする。
$0<a\leq 1$ のとき、$2a\leq 2$ より、図形 $R$ は $A_1$ から $A_2$ を除いた部分になる。よって面積は $S(a)=-\dfrac{1}{6}a^3+\dfrac{1}{3}$
$1<a\leq 2$ のとき、$C_2$ と $x$ 軸、および $x=2$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} -\int_a^2(x-2a)(x-a)dx &= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right]_a^2 \\ &= -\left(\frac{8}{3}-6a+4a^2-\frac{5}{6}a^3\right) \\ &= \frac{5}{6}a^3-4a^2+6a-\frac{8}{3} \end{aligned}$$

図形 $R$ は $A_1$ からこの図形を除いた部分になるので面積は

$$S(a)=\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{6}a^3-4a^2+6a-\frac{8}{3}\right)=-\frac{5}{6}a^3+4a^2-6a+3$$

$a > 2$ のとき、図形 $R$ は $A_1$ そのものになるため面積は $S(a) = \dfrac{1}{3}$

$a > 0$ の範囲を動くとき、上の 3 つの範囲で $S(a)$ の最小値を考える。
$0 < a \leq 1$ のときの最小値は $a = 1$ のときの $S(1) = \dfrac{1}{6}$
$1 < a \leq 2$ のとき

$$S'(a) = -frac52a^2 + 8a - 6 = -\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

より $a = \dfrac{6}{5}, 2$ のとき極値をとる。$S(a)$ の増減を見ると

| $a$ | 1 | $\cdots$ | 6/5 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| $S(a)$ | $\dfrac{1}{6}$ | 減少 | $\dfrac{3}{25}$ | 増加 | $\dfrac{1}{3}$ |

以上から $a = \dfrac{6}{5}$ のとき最小値 $S\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{3}{25}$ をとる。
$a > 2$ のときは常に $S(a) = \dfrac{1}{3}$ である。

以上から $a > 0$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値は $a = \dfrac{6}{5}$ のときの $S\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{3}{25}$ になる。