

数学 2

第 3 問

座標平面上の円 $x^2 + y^2 = 10$ を C とし、 x の関数 $y = |k(x - 2)| - 4$ のグラフを G とする。ただし $k > 0$ である。このとき、 C と G の共有点の個数について考えよう。

(1) グラフ G は直線 $x = (\text{ア})$ に関して対称であり、 k の値に関わらず点 $A((\text{イ}), (\text{ウエ}))$ を通る。

点 A を通り C に接する直線を ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよう。接点を $P(a, b)$ とすると、 ℓ の方程式は

$$(\text{オ})x + (\text{カ})y = 10$$

と表される。点 A は ℓ 上にあり、点 P は C 上にあるので

$$\begin{cases} (\text{キ})a - (\text{ク})b = 10 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、接線 ℓ の方程式は

$$y = (\text{ケ})x - (\text{コサ}) \text{ または } y = \frac{(\text{シス})}{(\text{セ})}(x + (\text{ソタ}))$$

である。

(2) C と G の共有点が 2 個となるような k の値の範囲は

$$\frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})} < k < (\text{テ})$$

である。

(3) C と G の共有点が 3 個となるような k の値は $k = (\text{ト})$ である。このとき、3 個のうち 2 個の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} (\text{ナ})x + y = (\text{ニ}) \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

を解くことにより得られる。したがって、3 個の共有点の x 座標は

$$(\text{ヌ}), \frac{(\text{ネ}) \pm (\text{ノ})\sqrt{(\text{ハ})}}{(\text{ヒ})}$$

となる。

$x = 4 - a$ のとき $|k((4 - a) - 2)| - 4 = |k(2 - a)| - 4 = |k(a - 2)| - 4$ となり $x = a$ のときの値と等しい。このことから、グラフ G は直線 $x = 2$ に対して対称である。また、 $x = 2$ のとき $|k(2 - 2)| - 4 = -4$ となるためグラフ G は常に点 $A(2, -4)$ を通る。

接点 $P(a, b)$ で C に接する直線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は

$$ax + by = 10$$

となる。この直線が点 A を通ることから $2a - 4b = 10$ つまり $a = 2b + 5$ 。また点 P は円 C 上にあることから $a^2 + b^2 = 10$ 。よって

$$(2b + 5)^2 + b^2 = 5b^2 + 20b + 25 = 10 \Rightarrow b^2 + 4b + 3 = (b + 1)(b + 3) = 0$$

となり、 $b = -1, -3$ となる。以上から接点は $(3, -1)$ または $(-1, -3)$ となり、接線 ℓ はそれぞれ

$$\begin{aligned} 3x - y &= 10 \Rightarrow y = 3x - 10 \\ -x - 3y &= 10 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = -\frac{1}{3}(x + 10) \end{aligned}$$

となる。

関数 $y = |k(x - 2)| - 4$ は

$$y = \begin{cases} -kx + 2k - 4 & x < 2 \\ kx - 2k - 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

$x < 2, x \geq 2$ の各範囲でのグラフ G の部分を G_1, G_2 とおく。 k の値に応じて G_1, G_2 と円 C との関係は以下の状態になる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_1, G_2 \text{ はともに } C \text{ に共有点を持たない} & k < \frac{1}{3} \\ G_1 \text{ は } C \text{ に接する。} G_2 \text{ は } C \text{ に共有点を持たない} & k = \frac{1}{3} \\ G_1 \text{ は } C \text{ に交わる。} G_2 \text{ は } C \text{ に共有点を持たない} & \frac{1}{3} < k < 3 \\ G_1 \text{ は } C \text{ に交わる。} G_2 \text{ は } C \text{ に接する} & k = 3 \\ G_1, G_2 \text{ はともに } C \text{ に交わる} & k > 3 \end{array} \right.$$

以上から C と G の共有点が 2 個となるときの、 G_1 は C に交わり、 G_2 は C に共有点を持たない場合になる。よって k の値の範囲は $\frac{1}{3} < k < 3$ になる。

また C と G の共有点が 3 個となるような k の値は $k = 3$ である。このとき 3 個の共有点のうち 2 個は G_1 と C の交点になるため、 $y = -3x + 2 \Rightarrow 3x + y = 2$ より

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

が成り立つ。これから $x^2 + (-3x + 2)^2 = 10x^2 - 12x + 4 = 10$ となるため、

$$x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

一方、残り 1 個の共有点は G_1 と C の接点となるため $(3, -1)$ 。以上から 3 個の共有点の x 座標は

$$3, \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$