数学２

第４問

a を実数とし、x の整式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^3+(a-1)x^2-(a+2)x-6a+8$$

とする。

(1) $P(x)$ を $x-3$ で割ったときのあまりは（アイ）である。
また、x の方程式 $P(x)=0$ は a の値に関わらず整数の解 $x=$（ウエ）を持つ。したがって を因数分解すると

$$P(x)=(x+\text{（オ）})\left\{x^2+(a-\text{（カ）})\,x-\text{（キ）}a+\text{（ク）}\right\}$$

となる。

(2) 方程式 $P(x)=0$ の解が全て実数となるような a の値の範囲は、$a\leq$（ケコ）または $a\geq$（サ） である。このとき、異なる実数解の個数がちょうど２個となるような a の値は $a=$（ケコ），（サ），$\dfrac{\text{（シス）}}{\text{（セ）}}$ である。

(3) （ケコ）$<a<$（サ）ならば方程式 $P(x)=0$ は虚数解を持つ。このとき、方程式 $P(x)=0$ の２つの虚数解を α,β とする。 α^2,β^2 が x の方程式

$$4x^2-kx+5k=0$$

の解となるような a と定数 k の値は

$$a=\frac{\text{（ソ）}}{\text{（タ）}},\ k=\text{（チ）}$$

である。

$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $P(3)$ に等しい。よって余りは

$$P(3)=27+9(a-1)-3(a+2)-6a+8=20$$

また

$$P(-2)=-8+4(a-1)+2(a+2)-6a+8=0$$

となるため、x の方程式 $P(x)=0$ は a の値に関わらず整数の解 $x=-2$ を持つ。このことから $P(x)$ は $x+2$ を因数として持つため $P(x)$ を因数分解すると、

$$P(x)=(x+2)\left\{x^2+(a-3)x-3a+4\right\}$$

方程式 $P(x)=0$ の解が全て実数となるとき２次方程式

$$x^2+(a-3)x-3a+4=0$$

の解が実数でなければいけない。つまり、この２次方程式の判別式

$$(a-3)^2-4\times(-3a+4)=a^2+6a-7=(a+7)(a-1)$$

は０以上でなければいけない。$(a+7)(a-1)\geq 0$ を解くと $a\leq -7, 1\leq a$
　異なる実数解の個数がちょうど２個となる場合として次の２つの場合がある。

(a) ２次方程式 $x^2+(a-3)x-3a+4=0$ が重解を持つ場合。このときは判別式が０に等しいので上の計算から $a=-7,1$ となる。このときの２次方程式の重解はそれぞれ $5,1$ となるため、方程式 $P(x)=0$ の解はちょうど２個である。

(b) ２次方程式 $x^2+(a-3)x-3a+4=0$ が $x=-2$ を解に持つ場合。このとき

$$(-2)^2-2(a-3)-3a+4=-5a+14=0$$

より $a=\dfrac{14}{5}$. このときの２次方程式の解は $x=2,\dfrac{11}{5}$ となるため、方程式 $P(x)=0$ の解はちょうど２個である。

$-7<a<1$ ならば方程式 $P(x)=0$ は虚数解を持つ。このとき、方程式 $P(x)=0$ の２つの虚数解を α,β とすると、次のことが成り立つ。

$$\alpha+\beta=-(a-3)=-a+3, \alpha\beta=-3a+4$$

これより、

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-a+3)^2-2(-3a+4)\\ &= a^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2\\ &= (3a-4)^2\end{aligned}$$

よって α^2,β^2 が x の方程式

$$4x^2-kx+5k=0$$

の解となるとき、

$$a^2+1=\frac{k}{4},\ (3a-4)^2=\frac{5}{4}k$$

が成り立つ。これを解くと

$$(a,k)=\left(\frac{1}{2},5\right),\ \left(\frac{11}{2},125\right)$$

となるが、$-7<a<1$ であることから、$(a,k)=\left(\dfrac{1}{2},5\right)$ の一つに決まる。