数学２Ｂ

第３問

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項が７、公差が $-4$ の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = (\text{アイ})n + (\text{ウエ})$$

であり、初項から第 $n$ 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (\text{オカ})n^2 + (\text{キ})n$$

である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は第 $n$ 項が

$$b_n = pn^2 - qn - r$$

という $n$ の２次式で表され

$$b_{n+1} - 2b_n = (\text{オカ})n^2 + (\text{キ})n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots [1]$$

を満たすとする。このとき

$$p = (\text{ク}),\ q = (\text{ケ}),\ r = (\text{コ})$$

であり、$b_1 = (\text{サシ})$ である。さらに次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう。

$$c_1 = 1$$
$$c_{n+1} - 2c_n = (\text{オカ})n^2 + (\text{キ})n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots [2]$$

[1] と [2] より、$d_n = c_n - b_n$ とおくと

$$d_{n+1} - (\text{ス})d_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ。これより、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = (\text{セ}) \cdot (\text{ソ})^{n-1} + (\text{ク})n^2 - (\text{ケ})n - (\text{コ})$$

である。数列 $\{c_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和は

$$(\text{タ}) \cdot (\text{チ})^n + \frac{(\text{ツ})}{(\text{テ})}n^3 - \frac{(\text{ト})}{(\text{ナ})}n^2 - \frac{(\text{ニヌ})}{(\text{ネ})}n - (\text{ノ})$$

となる。

---

$\{a_n\}$ は初項が７、公差が $-4$ の等差数列であることから、一般項は

$$a_n = 7 + (-4)(n-1) = -4n + 11$$

これから第 $n$ 項までの和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(-4n+11) \\ &= -4\times\frac{1}{2}n(n+1)+11\times n \\ &= -2n^2+9n\end{aligned}$$

数列 $\{b_n\}$ は第 $n$ 項が

$$b_n = pn^2 - qn - r$$

という $n$ の 2 次式で表され

$$b_{n+1} - 2b_n = -2n^2 + 9n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (1)$$

を満たすとする。このとき

$$\begin{aligned}b_{n+1} - 2b_n &= p(n+1)^2 - q(n+1) - r - 2(pn^2 - qn - r) \\ &= -pn^2 + (2p+q)n + (p-q+r)\end{aligned}$$

となることから、

$$-p = -2,\ 2p + q = 9,\ p - q + r = 0$$

となる。よって

$$p = 2,\ q = 5,\ r = 3$$

また $b_1 = 2\times 1^2 - 5\times 1 - 3 = -6$ となる。

$$\begin{aligned}&c_1 = 1 \\ &c_{n+1} - 2c_n = -2n^2 + 9n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (2)\end{aligned}$$

が成り立つ数列 $\{c_n\}$ について考える。$d_n = c_n - b_n$ とおくと (1), (2) から

$$d_{n+1} - 2d_n = (c_{n+1} - b_{n+1}) - 2(c_n - b_n) = (c_{n+1} - 2c_n) - (b_{n+1} - 2b_n) = 0$$

つまり数列 $\{d_n\}$ は初項 $d_1 = c_1 - b_1 = 1 - (-6) = 7$、公比 2 の等比数列になる。よって $d_n = 7\times 2^{n-1}$. 以上から $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}c_n &= d_n + b_n \\ &= 7\cdot 2^{n-1} + 2n^2 - 5n - 3\end{aligned}$$

となり、$\{c_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n}(7\cdot 2^{k-1} + 2k^2 - 5k - 3) \\ &= 7\times(2^n - 1) + 2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5\times\frac{1}{2}n(n+1) - 3\times n \\ &= 7\cdot 2^n + \frac{2}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{31}{6}n - 7\end{aligned}$$