

数学 2 B

第 4 問

四面体 $OABC$ において $OA = OB = BC = \sqrt{2}$, $OC = CA = AB = \sqrt{3}$ である。
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。

(1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\text{ア})$ であり、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{(\text{イ})}{(\text{ウ})}$ である。また $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{(\text{エ})}{(\text{オ})}$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = (\text{カ})$ である。

(2) 直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} = 0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{CP} = \frac{(\text{キ})}{(\text{ク})}\vec{a} + \frac{(\text{ケ})}{(\text{コ})}\vec{b} - \vec{c}$$

となり点 P は線分 AB を $1 : \frac{(\text{サ})}{(\text{シ})}$ に内分する。また $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{b} = (\text{ス})$ であり、 $|\overrightarrow{CP}| = \frac{\sqrt{(\text{セソ})}}{(\text{タ})}$ である。 $\overrightarrow{CP}$ は三角形 (チ) の各辺と垂直であるから、直線 CP は三角形 (チ) をふくむ平面に垂直である。ただし、(チ) については、当てはまるものを、次の 0 ~ 3 のうちから一つ選べ。

0 . ABC 1 . OBC 2 . OAC 3 . OAB

三角形 (チ) の面積は $\frac{\sqrt{(\text{ツテ})}}{(\text{ト})}$ であるから、四面体の体積は $\frac{(\text{ナ})}{(\text{ニヌ})}$ である。

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$ より $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = BA^2 = 3$. また

$$3 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2$$

より $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$. 同様に

$$2 = |\vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3$$

$$3 = |\vec{a} - \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 3$$

より $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{3}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ となる。

直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} = 0$ であるようにとる。点 P は直線 AB の上にあるため実数 t を使い $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ と書くことができる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\ &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= t\vec{a} + (1-t)\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

となる。条件 $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} = 0$ から

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} &= (t\vec{a} + (1-t)\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} \\ &= t\vec{a} \cdot \vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 2t + \frac{1}{2}(1-t) - 1 \\ &= \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $t = \frac{1}{3}$ となり

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$$

また $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ となることから点 P は線分 AB を $1 : \frac{1}{2}$ に内分する。一方

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \vec{b} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 2 - \frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{CP} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \overrightarrow{CP} \cdot (-\vec{c}) \\ &= -\left(\frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} - 3\right) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

よって $|\overrightarrow{CP}| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ となる。

$\overrightarrow{CP}$ は $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ のいずれとも直交するため三角形 OAB の各辺とも垂直であり、直線 CP が三角形 OAB を含む平面に垂直であることが分かる。

三角形 OAB は $OA = OB = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{3}$ と二等辺三角形であることから AB を底辺としたときその高さは

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となるため三角形 OAB の面積は

$$\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

また四面体 O A B C の体積は

$$\begin{aligned}(\text{三角形 O A B の面積}) \times |\overrightarrow{CP}| \times \frac{1}{3} &= \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$