数学１

第１問

(1)　a, b, c は定数で、$a > 0$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(1) = 4, f(2) = 9$ を満たすとき

$$b = (\text{アイ})a + (\text{ウ}),\ c = (\text{エ})a - (\text{オ})$$

となる。

　このとき、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の値の範囲は

$$0 < a < (\text{カ}),\ (\text{キク}) < a$$

である。とくに $a = \dfrac{1}{3}$ のとき、$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = (\text{ケコ}) \pm \sqrt{(\text{サシ})}$$

　$f(1) = 4, f(2) = 9$ を関数の式に代入すると

$$\begin{cases} a + b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 9 \end{cases}$$

これを解くと

$$b = -3a + 5,\ c = 2a - 1$$

　方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき判別式 $b^2 - 4ac$ が正の数になる。

$$b^2 - 4ac > 0$$

この式に $b = -3a + 5,\ c = 2a - 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} & (-3a + 5)^2 - 4 \times a \times (2a - 1) > 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 - 26a + 25 > 0 \\ \Rightarrow\ & (a - 1)(a - 25) > 0 \\ \Rightarrow\ & a < 1,\ 25 < a \end{aligned}$$

$a > 0$ の条件があるため、求める a の範囲は

$$0 < a < 1,\ 25 < a$$

$a = \dfrac{1}{3}$ のとき $b = 3 \times \dfrac{1}{3} + 5 = 4$, $c = 2 \times \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$. よって方程式は

$$\frac{1}{3}x^2 + 4x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 1 = 0$$

これを解くと $x = -6 \pm \sqrt{37}$.

(2)　整式 $A = 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$ を因数分解すると

$$A = (\text{(ス)}x + y + \text{(セ)})\,(\text{(ソ)}x + y - \text{(タ)})$$

となる。
$x = -1,\ y = \dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のときの A の値は（チツテ）である。

$A = 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$ を y についてまとめると

$$\begin{aligned} 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20 &= y^2 + (5x-1)y + 6x^2 + 2x - 20 \\ &= y^2 + ((3x-5) + (2x+4))y + 2(3x-5)(x+2) \\ &= (y + 3x - 5)(y + 2x + 4) \end{aligned}$$

これより

$$A = (2x + y + 4)\,(3x + y - 5)$$

$y = \dfrac{2}{3-\sqrt{7}} = 3 + \sqrt{7}$ となるため A に x, y のそれぞれの値を入れると

$$\begin{aligned} & (2 \times (-1) + (3 + \sqrt{7}) + 4)(3 \times (-1) + (3 + \sqrt{7}) - 5) \\ = \ & (-5 + \sqrt{7})(5 + \sqrt{7}) \\ = \ & \sqrt{7}^2 - 5^2 \\ = \ & -18 \end{aligned}$$