

数学 1

第 3 問

$\triangle ABC$ において、 $AB = 2, BC = 2\sqrt{13}, AC = 6$ とする。
 このとき $\angle CAB = (\text{アイウ})^\circ$ であり、 $\triangle ABC$ の面積は $(\text{エ})\sqrt{(\text{オ})}$ である。
 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とすると、

$$OA = OB = \frac{(\text{カ})\sqrt{(\text{キク})}}{(\text{ケ})}$$

であるので、辺 AB の中点を M とすると $OM = \frac{(\text{コ})\sqrt{(\text{サ})}}{(\text{シ})}$ である。

次に、辺 AC 上に点 D を $AB = AD$ となるようにとる。 $\triangle ABD$ の外接円の中心を O' とすると

$$O'A = O'B = (\text{ス}), O'M = \sqrt{(\text{セ})}$$

したがって

$$OO' = \frac{(\text{ソ})\sqrt{(\text{タ})}}{(\text{チ})}$$

である。また

$$\tan \angle ODO' = \frac{(\text{ツ})\sqrt{(\text{テ})}}{(\text{ト})}$$

余弦定理から

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\angle CAB)$$

この式に上の値を代入すると

$$\begin{aligned} (2\sqrt{13})^2 &= 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos(\angle CAB) \\ \Rightarrow 52 &= 40 - 24 \cos(\angle CAB) \\ \Rightarrow \cos(\angle CAB) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \angle CAB \leq 180^\circ$ より $\angle CAB = 120^\circ$ 。また $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\angle CAB) = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

OA 外接円 O の半径であるため、正弦定理から

$$2 OA = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}/2} = \frac{4\sqrt{39}}{3}$$

$$\text{よって } OA = OB = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

$\triangle OAB$ は O を頂角とする二等辺三角形になるため、 M は線分 AB の中点で $\triangle OAM$ は直角三角形になる。よって

$$OM^2 = \left(\frac{2\sqrt{39}}{3} \right)^2 - 1^2 = \frac{49}{3}$$

これより

$$OM = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle ABD$ は $\angle BAD$ を頂角とする二等辺三角形となるため、 $\triangle ABD$ の外接円の中心 O' について $O'A$ は $\angle BAD$ の二等分線になる。つまり $\angle BAO' = \angle DAO' = 60^\circ$ 。これより $\triangle O'AD$, $\triangle O'AB$ は正三角形になる。よって

$$\begin{aligned} O'A &= O'B = 2, \\ O'M &= \sqrt{O'A^2 - AM^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

点 O' は線分 OM の上にあるため $OO' = OM - O'M = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

$O'D$ と AB は平行であるため $OO' \perp O'D$, $O'D = 2$ より

$$\tan \angle ODO' = \frac{OO'}{O'D} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$