

数学 1

第 4 問

次のような装置がある。 $x > 1$ を満たす数 x が書かれた紙をこの装置に入れると、装置は $n \leq x < n + 1$ を満たす整数 n を求め、以下のように作動する。

- $x > n$ のとき n 個の玉と数 $\frac{1}{x-n}$ が書かれた紙を出す。
- $x = n$ のとき n 個の玉を出し、紙は出さない。

(1) $\frac{27}{8}$ が書かれた紙をこの装置に入れて、出てきた紙をまた装置に入れることを、紙が出てくる限り繰り返す。

$3 \leq \frac{27}{8} < 4$ であるから、1 回目には 3 個の玉と $\frac{8}{3}$ が書かれた紙が出てくる。

次に $\frac{8}{3}$ が書かれた紙を入れるので、2 回目には (ア) 個の玉と $\frac{(イ)}{(ウ)}$ が書かれた紙が出てくる。

(2) $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ が書かれた紙を個の装置に入れて、出てきた紙をまた装置に入れることを、紙が出てくる限り繰り返す。

1 回目には (エ) 個の玉と $\frac{(オ)+\sqrt{10}}{(カ)}$ が書かれた紙が出てくる。

2 回目には (キ) 個の玉と $\frac{(ク)+\sqrt{10}}{(ケ)}$ が書かれた紙が出てくる。

3 回目には (コ) 個の玉と $\frac{(サ)+\sqrt{10}}{(シ)}$ が書かれた紙が出てくる。

また、1 1 回目には (ス) 個の玉と $\frac{(セ)+\sqrt{10}}{(ソ)}$ が書かれた紙が出てくる。

$\frac{27}{8}$ が書かれた紙をこの装置に入ると 3 個の玉と $\frac{8}{3}$ が書かれた紙が出てくる。

次に $\frac{8}{3}$ が書かれた紙を入れると、 $2 \leq \frac{8}{3} < 3$, $\frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ であるため、

2 個の玉と $\frac{3}{2}$ が書かれた紙が出てくる。

$3 \leq \sqrt{10} < 4$ より $1 < \frac{4}{3} \leq \frac{1+\sqrt{10}}{3} < \frac{5}{3} < 2$. $\frac{1+\sqrt{10}}{3} - 1 = \frac{\sqrt{10}-2}{3}$ となるため

1 回装置に紙を入れると 1 個の玉と $\frac{3}{\sqrt{10}-2} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ と書かれた紙が出てくる。

同じく $2 < \frac{5}{2} \leq \frac{2+\sqrt{10}}{2} < 3$, $\frac{2+\sqrt{10}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{10}-2}{2}$ となるため

2 回装置に紙を入れると 2 個の玉と $\frac{2}{\sqrt{10}-2} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ と書かれた紙が出てくる。

同じく $1 < \frac{5}{3} \leq \frac{2 + \sqrt{10}}{3} < 2$. $\frac{2 + \sqrt{10}}{3} - 1 = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}$ となるため

3回装置に紙を入れると1個の玉と $\frac{3}{\sqrt{10} - 1} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ と書かれた紙が出てくる。

3回装置に入れると始めに書かれていた数 $\frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ が書かれた紙が出てくるため、4回目以降は上の1, 2, 3回目と同じ結果が繰り返し起こる。11回目は2回目の結果と同じになるため11回装置に紙を入れると2個の玉と $\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$ と書かれた紙が出てくる。