

数学2 兼 数学2B

第1問

(1) $x \geq 2, y \geq 2, 8 \leq xy \leq 16$ のとき $z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。
 $s = \log_2 x, t = \log_2 y$ とおくと、 $s, t, s+t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \geq (\text{ア}), t \geq (\text{ア}), (\text{イ}) \leq s+t \leq (\text{ウ})$$

となる。また

$$z = \frac{(\text{エ})}{(\text{オ})} s + t$$

が成り立つから、 z は $s = (\text{カ}), t = (\text{キ})$ のとき最大値 $\frac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$ をとる。

したがって、 z は $x = (\text{コ}), y = (\text{サ})$ のとき最大値 $\frac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$ をとる。

$s = \log_2 x$ より $s \geq \log_2 2 = 1$. 同様に $t = \log_2 y \geq 1$. また $8 \leq xy \leq 16$ より

$$\begin{aligned} \log_2 8 \leq \log_2 xy \leq \log_2 16 &\Rightarrow 3 \leq \log_2 x + \log_2 y \leq 4 \\ &\Rightarrow 3 \leq s + t \leq 4 \end{aligned}$$

z の式を変形すると

$$\begin{aligned} z &= \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y \\ &= \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 y \\ &= \frac{1}{2} s + t \end{aligned}$$

$s \geq 1, t \geq 1, 3 \leq s+t \leq 4$ の条件が成り立つ範囲で $z = \frac{1}{2}s + t$ が取りうる最大値は $s = 1,$

$$t = 3 \text{ のときの } z = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

したがって z は $x = 2^1 = 2, y = 2^3 = 8$ のときに最大値 $\frac{7}{2}$ をとる。

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5 \sin \theta - 3 \cos 2\theta = 3 \cdots \cdots (*)$$

を満たす θ について考えよう。

方程式 (*) を $\sin \theta$ を用いて表すと

$$(\text{シ}) \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - (\text{ス}) = 0$$

となる。したがって、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より

$$\sin \theta = \frac{(\text{セ})}{(\text{ソ})}$$

であり、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち、小さい方を θ_1 、大きい方を θ_2 とすると

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{(\text{タ})}}{(\text{ソ})}, \cos \theta_2 = \frac{(\text{チ})\sqrt{(\text{タ})}}{(\text{ソ})}$$

である。

θ_1 について不等式 (ツ) が成り立つ。(ツ) に当てはまるものを、次の 0 . ~ 5 . のうちから一つ選べ。

$$0 \quad 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12} \quad 1 \quad \frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6} \quad 2 \quad \frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$$

$$3 \quad \frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4} \quad 4 \quad \frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3} \quad 5 \quad \frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

ただし、必要ならば、次の値

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。 さらに、不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは (テ) である。

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ を (*) に代入すると

$$\begin{aligned} 5 \sin \theta - 3 \cos 2\theta = 3 &\Rightarrow 5 \sin \theta - 3(1 - 2 \sin^2 \theta) = 3 \\ &\Rightarrow 6 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - 6 = 0 \\ &\Rightarrow (2 \sin \theta + 3)(3 \sin \theta - 2) = 0 \end{aligned}$$

これより $\sin \theta = -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. ここで $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より $\sin \theta = \frac{2}{3}$ となり

$$\cos^2 \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{5}{9}$$

$\sin \theta > 0$ より θ_1, θ_2 はそれぞれ第 1、第 2 象限にある。よって、

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta_2 = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ における $\cos \theta$ の値をまとめると以下ようになる。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos^2 \theta$	1	$\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

上の表の $\cos^2 \theta$ の中で $\cos^2 \theta_1 = \frac{5}{9} \simeq 0.55$ は $\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \simeq 0.654$ と $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ の間の値になる。よって $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ となる（つまり 3 . が成り立つ）

$\theta_2 = \pi - \theta_1$ が成り立つことから $\frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \frac{4}{5}\pi$ が成り立つため、

$$\frac{3}{5}\pi < 3\theta_1 < \frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \frac{4}{5}\pi, \quad \frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \frac{4}{5}\pi < 4\theta_1 < \pi$$

となり、不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $n = 4$ である。