

数学2 兼 数学2 B

第2問

放物線 $y = 2x^2$ を C、点 $(1, -2)$ を A とする。

点 Q (u, v) に関して、点 A と対称な点を P (x, y) とすると

$$u = \frac{x + (\text{ア})}{(\text{イ})}, \quad v = \frac{y - (\text{ウ})}{(\text{エ})}$$

が成り立つ。Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると、D は放物線

$$y = x^2 + (\text{オ})x + (\text{カ})$$

である。

2つの放物線 C と D の交点を R と S とする。ただし、 x 座標の小さいほうを R とする。点 R, S の x 座標はそれぞれ (キク) (ケ) で、点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y = (\text{コ}), \quad y = (\text{サ})x - (\text{シ})$$

である。

P を放物線 D 上の点とし、P の x 座標を a とおく。P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする。 $(\text{キク}) < a < (\text{ケ})$ のとき、三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{(\text{ス})} ((\text{セ})a^3 + a^2 + (\text{ソ})a + (\text{タ}))$$

と表される。 $S(a)$ は $a = \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})}$ のとき、最大値をとる。

$a = \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})}$ のとき、直線 HR と放物線 D の交点のうち、R と異なる点の x 座標は $a = \frac{(\text{テ})}{(\text{ト})}$

である。このとき、 $\frac{(\text{テ})}{(\text{ト})} \leq x \leq \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})}$ の範囲で、放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\frac{(\text{ナニヌ})}{(\text{ネノ})}$ である。

点 P は点 Q (u, v) に関して、点 A と対称な点であるため、点 Q は線分 AP の中点である。よって

$$u = \frac{x + 1}{2}, \quad v = \frac{y - 2}{2}$$

が成り立つ。Q (u, v) が C 上を動くとき、 $v = 2u^2$ が成り立つため、

$$\frac{y - 2}{2} = 2 \left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 \Rightarrow y = x^2 + 2x + 3$$

これが点 P の軌跡 D になる。

2つの放物線 C, D の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x^2 &= x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = -1, 3 \end{aligned}$$

これより点 R, S の x 座標はそれぞれ $-1, 3$ である。放物線 D に関して $y' = 2x + 2$ 。また点 R, S の座標はそれぞれ $(-1, 2), (3, 18)$ となることから点 R における放物線 D の接線は

$$y - 2 = (2 \times (-1) + 2)(x + 1) \Rightarrow y = 2$$

点 S における放物線 D の接線は

$$y - 18 = (2 \times 3 + 2)(x - 3) \Rightarrow y = 8x - 6$$

x 座標が a である、放物線 D 上の点 P の y 座標は $a^2 + 2a + 3$, P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点 H は x 座標が a であることから y 座標は $2a^2$ 。 $-1 < a < 3$ のとき $a^2 + 2a + 3 > 2a^2$ となるため、線分 PH の長さは

$$(a^2 + 2a + 3) - 2a^2 = -a^2 + 2a + 3$$

三角形 PHR の底辺を PH と見たとき高さは P と R の座標の差 $a - (-1) = a + 1$ となるため、三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{2} \times (-a^2 + 2a + 3) \times (a + 1) = \frac{1}{2}(-a^3 + a^2 + 5a + 3)$$

この面積 $S(a)$ について

$$S'(a) = \frac{1}{2}(-3a^2 + 2a + 5) = \frac{1}{2}(-3a + 5)(a + 1)$$

これより $S(a)$ の増減表を作ると以下ようになる。

a	-1	$\dots$	$5/3$	$\dots$	3
$S'(a)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$S(a)$	0	増加	極大値	減少	0

つまり $S(a)$ は $a = \frac{5}{3}$ のとき最大値をとる。

$a = \frac{5}{3}$ のとき点 H の座標は $\left(\frac{5}{3}, \frac{50}{9}\right)$ となるため、直線 HR の式は

$$y - 2 = \frac{\frac{50}{9} - 2}{\frac{5}{3} + 1}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

よって直線 HR と放物線 D の交点のうち、R と異なる点の x 座標は

$$x^2 + 2x + 3 = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \Rightarrow (x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

より $\frac{1}{3}$ である。 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ の範囲での放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}
\int_{1/3}^{5/3} \left\{ (x^2 + 2x + 3) - \left(\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \right) \right\} dx &= \frac{1}{3} \int_{1/3}^{5/3} (3x^2 + 2x - 1) dx \\
&= \frac{1}{3} [x^3 + x^2 - x]_{1/3}^{5/3} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{125}{27} - \frac{1}{27} \right) + \left(\frac{25}{9} - \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \right) \right\} \\
&= \frac{160}{81}
\end{aligned}$$