数学2

第3問

座標平面上において、原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 上の 2 点 P, Q に対して、線分 PQ 上の点 N を $PN : NQ = 4 : 1$ となるようにとる。ただし、 P と Q が一致するときは、 N は P, Q と同じ点とする。

(1) 点 P, Q の座標をそれぞれ $(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta)$ とする。ここで、 $0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < 2\pi$ とする。このとき、点 N の座標 (X, Y) は

$$X = \frac{\cos \alpha + (\text{ア})\cos \beta}{(\text{イ})}, Y = \frac{\sin \alpha + (\text{ウ})\sin \beta}{(\text{エ})}$$

で与えられ

$$X^2 + Y^2 = \frac{(\text{オ})}{(\text{カキ})} \cos(\alpha - \beta) + \frac{(\text{クケ})}{(\text{コサ})}$$

となるので、点 P, Q を円 C_1 上で動かすとき、 $X^2 + Y^2$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{(\text{シ})}{(\text{スセ})} \leq X^2 + Y^2 \leq 1$$

である。

(2) 点 P, Q を円 C_1 上で動かしたとき、点 N は不等式

$$\frac{(\text{シ})}{(\text{スセ})} \leq X^2 + Y^2 \leq 1 \dots\dots (*)$$

が表す領域全体を動くことを示そう。

点 $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ を固定し、点 P を C_1 上で 1 周させたとき、点 N の軌跡は点

$$T \left(\frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})} \cos \beta, \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})} \sin \beta \right)$$

を中心とする半径 $\frac{(\text{テ})}{(\text{ト})}$ の円 C_2 である。

さらに、点 Q を C_1 上で 1 周させたとき、 T は原点を中心とする半径 $\frac{(\text{ナ})}{(\text{ニ})}$ の円上を 1 周する。したがって、点 Q を C_1 上で 1 周させたとき、円が通過してできる図形は、上の不等式 (*) が表す領域と一致する。

3 点 P, Q, N について $PN : NQ = 4 : 1$ が成り立つことから

$$X = \frac{\cos \alpha + 4 \cos \beta}{5}, Y = \frac{\sin \alpha + 4 \sin \beta}{5}$$

このことから

$$\begin{aligned} 25(X^2 + Y^2) &= (\cos \alpha + 4 \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + 4 \sin \beta)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha \cos \beta + 16 \cos^2 \beta \\ &\quad + \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha \sin \beta + 16 \sin^2 \beta \\ &= 1 + 8(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + 16 \\ &= 17 + 8 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

つまり

$$X^2 + Y^2 = \frac{8}{25} \cos(\alpha - \beta) + \frac{17}{25}$$

$-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$ より $X^2 + Y^2$ のとり得る範囲は

$$\frac{9}{25} \leq X^2 + Y^2 = \frac{8}{25} \cos(\alpha - \beta) + \frac{17}{25} \leq 1$$

である。

点 $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ を固定し、点 P を C_1 上で1周させたとき、

$$\left(X - \frac{4}{5} \cos \beta\right)^2 + \left(Y - \frac{4}{5} \sin \beta\right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

が成り立つため、点 N の軌跡は中心 T が

$$\left(\frac{4}{5} \cos \beta, \frac{4}{5} \sin \beta\right)$$

で半径が $\frac{1}{5}$ の円 C_2 である。

点 T は

$$\left(\frac{4}{5} \cos \beta\right)^2 + \left(\frac{4}{5} \sin \beta\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

となるため、点 Q を C_1 上で1周させたとき、 T は原点を中心とする半径 $\frac{4}{5}$ の円上を1周する。したがって、点 Q を C_1 上で1周させたとき、円が通過してできる図形は、上の不等式 (*) が表す領域と一致する。