数学２

第４問

$P(x)$ を３次の整式とし、$a,\ b,\ c$ は実数であり、$a \neq 0$ とする。$P(x)$ を $5ax^2 - bx + c$ で割ったとき、商は $-x+2$ で、余りは $2x-4$ であるとする。

(1) $P(x)$ は $x-$（ア）で割り切れる。その商は

$$（イウエ）x^2 +（オ）x -（カ）+（キ）$$

である。
　また、$P(x)$ を $(5x-2)(x-1)$ で割ったときの余りが $4x$ であるとする。$b$ と $c$ は $a$ を用いて

$$b = （ク）a -（ケ）,\ c = （コ）a +（サ）$$

と表される。
以下では $b = （ク）a -（ケ）,\ c = （コ）a +（サ）$ とする。

(2) ３次方程式 $P(x) = 0$ が $0$ と異なる三つの解を持つとき、それら三つの解の逆数の和は $a$ を用いて表すと

$$4 - \frac{（シ）}{（ス）a -（セ）}$$

である。

(3) ３次方程式 $P(x)=0$ の一つの解の逆数が $1+ki$ ($k$ は正の実数) であるとする。このとき、三つの解の逆数の和は $\dfrac{（ソ）}{（タ）}$ であり、$a$ の値は（チ）となる。したがって、$k$ の値は（ツ）である。

---

$P(x)$ を $5ax^2 - bx + c$ で割ったとき、商は $-x+2$ で、余りは $2x-4$ であることから

$$\begin{aligned} P(x) &= (5ax^2 - bx + c)(-x+2) + (2x-4) \\ &= -(5ax^2 - bx + c)(x-2) + 2(x-2) \\ &= (x-2)(-5ax^2 + bx - c + 2) \end{aligned}$$

つまり $P(x)$ は $x-2$ で割り切れて、その商は $-5ax^2 + bx - c + 2$ である。
　$P(x)$ を $(5x-2)(x-1)$ で割ったときの余りが $4x$ であるとする。このときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (5x-2)(x-1)Q(x) + 4x$$

が成り立つ。よって $P(1) = 4 \times 1 = 4,\ P(2/5) = 4 \times (2/5) = 8/5$ が成り立つ。

$$P(1) = (-1) \times (-5a + b - c + 2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 5a - b + c = 6$$

$$P\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5} \times \left(-5a \times \frac{4}{25} + b \times \frac{2}{5} - c + 2\right) = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad 4a - 2b + 5c = 15$$

この２式から $b = 7a-5,\ c = 2a+1$ となる。

３次方程式 $P(x)=0$ が 0 と異なる三つの解を持つとき、$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるため、$x=2$ が一つの解になる。残り２つの解は２次方程式

$$-5ax^2+bx-c+2=-5ax^2+(7a-5)x-2a+1=0$$

の解になる。この２つの解を $\alpha,\beta$ とおくと

$$\alpha+\beta=-\frac{7a-5}{-5a}=\frac{7a-5}{5a},\quad \alpha\beta=\frac{-2a+1}{-5a}=\frac{2a-1}{5a}$$

が成り立つ。よって３次方程式 $P(x)=0$ の三つの解の逆数の和は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} &= \frac{1}{2}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{7a-5}{5a}\times\frac{5a}{2a-1}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{7a-5}{2a-1}\end{aligned}$$

さらに

$$\frac{7a-5}{2a-1}-\frac{7}{2}=-\frac{3}{4a-2}$$

となるため、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-\frac{3}{4a-2}=4-\frac{3}{4a-2}$$

３次方程式 $P(x)=0$ の一つの解の逆数が $1+ki$ ($k$ は正の実数) であるとする。このときこの方程式の３つの解の逆数は $\frac{1}{2},\ 1+ki,\ 1-ki$ となる。実際 $\frac{1}{\alpha}=1+ki$ とすると、

$$\alpha=\frac{1}{1+ki}=\frac{1-ki}{1+k^2}\Rightarrow\beta=\overline{\frac{1-ki}{1+k^2}}=\frac{1+ki}{1+k^2}\Rightarrow\frac{1}{\beta}=1-ki$$

よって三つの解の逆数の和は $\frac{1}{2}+(1+ki)+(1-ki)=\frac{5}{2}$. このことから

$$4-\frac{3}{4a-2}=\frac{5}{2}\Rightarrow a=1$$

よって

$$P(x)=(x-2)(-5x^2+2x-1)$$

となり

$$\alpha\beta=\frac{1}{1+ki}\times\frac{1}{1-ki}=\frac{1}{1+k^2}=\frac{1}{5}.$$

$k$ は正の実数であることから $k=2$.