

数学 2 B

第 3 問

$\{a_n\}$ を初項が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり、その初項は $\frac{(\text{ア})}{(\text{イ})}$ 、公比は $\frac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$ である。したがって

$$T_n = \frac{(\text{オ})}{(\text{カ})} \left(1 - \frac{(\text{キ})}{(\text{ク})} \right)$$

である。また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{(\text{ケ})}{(\text{コ})}$$

となる。

(2) 次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = 2n \cdot b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定め、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k$ とおく。

$$(\text{サ})c_{n+1} - c_n = (\text{シ})b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^n ((\text{サ})c_{k+1} - c_k) = (\text{シ})T_n \quad \cdots \cdots (i)$$

である。また、この左辺の和をまとめ直すと、 U_n , c_{n+1} , c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^n ((\text{サ})c_{k+1} - c_k) = (\text{ス})U_n + (\text{セ})c_{n+1} - (\text{ソ})c_1 \quad \cdots \cdots (ii)$$

と表される。

(i) と (ii) より

$$U_n = \frac{(\text{タチ})}{(\text{ツテ})} - \frac{(\text{トナ})n + (\text{ニヌ})}{(\text{ソテ})} \cdot \frac{1}{(\text{ネ})^n}$$

となる。

数列 $\{b_n\}$ の初項は $b_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ 公比は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ となるため、一般項は $b_n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9^{n-1}} = \frac{1}{3^{2n-1}}$ これより

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}b_1 b_2 \cdots b_n &= \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{3^3} \times \cdots \times \frac{1}{3^{2n-1}} \\&= \frac{1}{3^{1+3+\cdots+(2n-1)}} \\&= \frac{1}{3^{n^2}}\end{aligned}$$

$$c_n = 2n \cdot b_n = \frac{2n}{3^{2n-1}} \text{ について}$$

$$c_{n+1} = (2n+2) \times b_{n+1} = 2(n+1) \times \frac{b_n}{9} = \frac{2}{9}(n+1)b_n$$

が成り立つため

$$\begin{aligned}9c_{n+1} - c_n &= 2(n+1)b_n - 2nb_n \\&= 2b_n\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n (9c_{k+1} - c_k) = \sum_{k=1}^n (2b_k) = 2T_n$$

が成り立つ。この左辺の和をまとめ直すと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (9c_{k+1} - c_k) &= 9 \sum_{k=1}^n c_{k+1} - \sum_{k=1}^n c_k \\&= 9(c_{n+1} + \sum_{k=1}^n c_k - c_1) - \sum_{k=1}^n c_k \\&= 8U_n + 9c_{n+1} - 9c_1\end{aligned}$$

つまり $2T_n = 8U_n + 9c_{n+1} - 9c_1$ が成り立つため

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{1}{8} (2T_n - 9c_{n+1} + 9c_1) \\&= \frac{1}{4} T_n - \frac{9}{8} c_{n+1} + \frac{9}{8} c_1 \\&= \frac{3}{32} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right) - \frac{9}{8} \times \frac{6(n+1)}{9^{n+1}} + \frac{9}{8} \times \frac{2}{3} \\&= \frac{27}{32} - \frac{24n+27}{32} \times \frac{1}{9^n}\end{aligned}$$