数学２Ｂ

第６問

p, q を異なる自然数とする。このとき、与えられた自然数 d について、d 以下の自然数のうちで

$$k = mp + nq \quad (m, n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \cdots (*)$$

のように表すことができるものを小さい順にすべて列挙し、最後にその個数を表示したい。そのために次のような（プログラム）を作った。ここで INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

（プログラム）

```
100 INPUT PROMPT "p=":  P
110 INPUT PROMPT "q=":  Q
120 INPUT PROMPT "d=":  D
130 LET U=0
140 FOR K=1 TO D
150    IF K-INT(K/P)*P=0 THEN （ア）
160    FOR M=0 TO INT(K/P)
170       LET R=K-M*P
180       IF（イ）THEN（ア）
190    NEXT M
200     （ウ）
210    PRINT K
220     （エ）
230 NEXT K
240 PRINT "総数 ="; U
250 END
```

(1)（プログラム）の（ア）、（ウ）、（エ）に当てはまるものを、それぞれ次の０．～ｂ．のうちから一つずつ選べ。

０.GOTO 150	１.GOTO 170	２.GOTO 180
３.GOTO 200	４.GOTO 210	５.GOTO 230
６.PRINT R	７.PRINT U	８.PRINT M
９.LET R=R+1	ａ.LET U=U+1	ｂ.LET K=K+1

また（イ）に当てはまるものを、次の０．～５．のうちから一つ選べ。

０.R-INT(R/M)*M<>0	１.R-INT(R/M)*M=0
２.R-INT(R/P)*P<>0	３.R-INT(R/P)*P=0
４.R-INT(R/Q)*Q<>0	５.R-INT(R/Q)*Q=0

(2)（プログラム）を実行し、変数 P，Q，D にそれぞれ 3，7，15 を入力したとき、整数の列

3 （オ） 7 9 （カキ） 12 13 14 15

に続いて

総数 = 9

が出力される。また、変数 P，Q，D にそれぞれ 3，7，100 入力したとき、整数の列に続いて

総数 = （クケ）

が出力される。

（プログラム）を部分的に変更して、次のような２種類のプログラムを作る。
(3) 式 $(*)$ のように表すことができないような d 以下の自然数 k を小さい順に全て列挙し、最後にその個数を表示したい。そのためには（プログラム）の 150 行および 180 行にある（ア）を（コ）に置き換えるとともに、200 行を削除すればよい。（コ）に当てはまるものを、次の０．〜５．のうちから一つ選べ。

０.GOTO 190　１.GOTO 200　２.GOTO 210
３.GOTO 220　４.GOTO 230　５.GOTO 240

(4) 自然数 k に対して、式 $(*)$ を満たす組 $(m,\ n)$ の個数を v_k とする。d 以下の各自然数 k について v_k を出力し、最後に総数として和 $v_1 + \cdots + v_d$ の値を表示したい。そのためには、（プログラム）の 150 行を

```
150 （サ）
```

のように変更し、180 行の（ア）を（シ）に置き換えて、200 行を削除する。さらに 210 行および 220 行を

```
210   PRINT "k=" ;K; "のとき " ;V; "個"
220   （ス）
```

に変更すればよい。（サ）（シ）（ス）に当てはまるものを、それぞれ次の０．〜５．のうちから一つずつ選べ。

０.GOTO 210　１.GOTO 220　２.GOTO 230
３.LET V=0　４.LET V=U　５.LET U=U+V
６.LET V=V+U　７.LET U=U+1　８.LET V=V+1

問題の（プログラム）は以下の手順で計算を行う。

(i) p,q,d の値を入力する
（100〜120 行にあたる）
(ii) $U=0$ とする。この値が $(*)$ を満たす d 以下の自然数 k の個数にあたる
（130 行にあたる）
(iii) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ d$ に対して、$(*)$ を満たす m,n が存在するか調べる。
（140 行にあたる）
(iv) $k=mp$ となる m が存在するとき、$(*)$ を満たす m,n が存在するため、k を表示して、U を１増やす。（150 行にあたる）
(v) $k=mp$ となる m が存在しないとき、$(*)$ を満たす m,n が存在するならば $m\leq$ INT(k/p) である。そのため $m=1,\ 2,\ \cdots,$ INT(k/p) に対して、$(*)$ を満たす m,n が存在するか調べる。（160 行にあたる）
(vi) $r=k-$ INT(k/p) とおく。（170 行にあたる）
(vii) $r=nq$ となる n が存在するするとき、$k=mp+nq$ となるため $(*)$ の式が成り立つ。k を表示して、U を１増やす。（180 行にあたる）
(viii) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ d$ について調べ終えたら、U を表示する。（240 行にあたる）

(iv), (vii) の「k を表示して、U を１増やす」という操作を一つにまとめ、別の行に書くことにする。それが 210 行〜 220 行にあたる。
以上より（ア）には 210 行に行くこと (４．`GOTO 210`) を書く。$k=mp$ は `K-INT(K/P)*P=0` と同値になるため、$r=nq$ は `R-INT(R/Q)*Q=0` と同値。つまり（イ）には５．が入る。
200 行の（ウ）には $(*)$ を満たす m,n が存在しないときの操作を表すが、k を表示せず、U を１増やすことはしないため 210 行〜 220 を飛ばす操作 (５．`GOTO 230`) を書く。
（エ）には U を１増やす操作 (ａ．`LET U=U+1`) を書く。

(2)（プログラム）を実行し、変数 P，Q，D にそれぞれ 3，7，15 を入力したとき

$$6=2\times 3,\quad 10=1\times 3+1\times 7$$

となるため、整数の列

3 （オ）=6 7 9 （カキ）=10 12 13 14 15

に続いて

総数 = 9

が出力される。
15 以上の整数 k は以下のことから $(*)$ の式を満たす m,n が存在することが分かる。

- $k\equiv 0(\mod 3)$ のとき $k=3m\ (m\geq 5)$ となるため $(*)$ の式を満たす。
- $k\equiv 1(\mod 3)$ のとき $k=3m+1\ (m\geq 5)$ となる。このとき $k=3(m-2)+7$ となるため $(*)$ の式を満たす。
- $k\equiv 2(\mod 3)$ のとき $k=3m+2\ (m\geq 5)$ となる。このとき $k=3(m-4)+7\times 2$ となるため $(*)$ の式を満たす。

よって、変数 P，Q，D にそれぞれ 3，7，100 入力したとき、整数の列は $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 11$ 以外の 100 以下の整数が現れる。これより

総数 =（クケ）=94

が出力される。

式 $(*)$ のように表すことができないような d 以下の自然数 k を小さい順に全て列挙し、最後にその個数を表示したい。そのためには（プログラム）の 150〜180 行までの２つの条件を満たさないときに K を出力し U を１増やすようにする。つまり 150〜180 行までの２つの条件を満たすときは 210〜220 を飛ばす必要がある。よって（ア）の箇所には ４．GOTO 230 に置き換えて、200 行を削除すればよい。

自然数 k に対して、式 $(*)$ を満たす組 $(m,\ n)$ の個数を v_k とする。d 以下の各自然数 k について v_k を出力し、最後に総数として和 $v_1+\cdots+v_d$ の値を表示したい。そのためには、$v_k,\, v_1+\cdots+v_d$ にあたる変数を決めなければいけない。この後の 210 行のプログラムから v_k にあたる変数は V、$v_1+\cdots+v_d$ にあたる変数 U として進めることになる。よって 150 行は

150　LET V=0（３.）

のように変更し、180 行の（ア）の箇所には $(*)$ を満たす (m,n) が存在するときの操作、V を１増やす操作 LET V=V+1（８.）に置き換えて、200 行を削除する。
さらに 210 行および 220 行には v_k の表示と U に v_k を加える操作を入れる。よって

```
210    PRINT "k=" ;K; "のとき " ;V; "個"
220    LET U=U+V（５.）
```

と変更する。