数学１

第１問

［１］$\alpha = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。α の分母を有理化すると

$$\alpha = \frac{\textbf{(ア)} - \sqrt{\textbf{(イウ)}}}{\textbf{(エ)}}$$

となる。
　２次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\textbf{(オ)}}{\textbf{(カ)}}, \textbf{(キ)}$$

である。

　次の０．～３．の数のうち最も小さいものは **(ク)** であある

$$0.\frac{(\text{ア}) - \sqrt{(\text{イウ})}}{(\text{エ})} \quad 1.\frac{(\text{エ})}{(\text{ア}) - \sqrt{(\text{イウ})}}$$
$$2.\frac{(\text{オ})}{(\text{カ})} \quad 3.(\text{キ})$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} \\
&= \frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3} \\
&= \frac{10-2\sqrt{21}}{4} \\
&= \mathbf{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}
\end{aligned}$$

$6x^2 - 7x + 1 = (6x-1)(x-1)$ より $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は $x = \mathbf{\frac{1}{6}},\ \mathbf{1}$

$4I < \sqrt{21} < 5$ より $5 - \sqrt{21} < 2$ であるため $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} < 1$、よって $\dfrac{2}{5-\sqrt{21}} > 1 > \dfrac{1}{6}$
。このため４つの数のうち最も小さいものは $\dfrac{1}{6},\ \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ のいずれかである。
$\dfrac{1}{6} - \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3\sqrt{21}-14}{6}$ について、

$$(3\sqrt{21})^2 = 189,\ 14^2 = 196$$

より

$$\frac{1}{6} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{21}-14}{6} < 0 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

よって最も小さい数は**2.** の $\frac{1}{6}$

［2］n を整数とし、x の連立不等式

$$\begin{cases} 6x^2 - 11nx + 3n^2 & \leq & 0 & \cdots (\mathrm{I}) \\ |3x - 2n| & \geq & 2 & \cdots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

を考える。

(I) の左辺は

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 = (\textbf{(ケ)}x - n)(\textbf{(コ)}x - \textbf{(サ)}n)$$

と因数分解される。

$x = 1$ が (I) を満たすような整数 n の範囲は

$$\textbf{(シ)} \leq n \leq \textbf{(ス)}$$

である。　$x = 1$ が (II) を満たすような整数 n の範囲は

$$n \leq \textbf{(セ)}, \textbf{(ソ)} \leq n$$

である。

よって $x = 1$ が上の連立方程式を満たすとき、$n = \textbf{(タ)}$ である。
$n =$（タ）のとき、連立方程式の解は

$$\textbf{(チ)} \leq x \leq \frac{\textbf{(ツ)}}{\textbf{(テ)}}, \frac{\textbf{(ト)}}{\textbf{(ナ)}} \leq x \leq \frac{\textbf{(ニ)}}{\textbf{(ヌ)}}$$

である。

(I) の左辺は

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 = (\mathbf{3}x - n)(\mathbf{2}x - \mathbf{3}n)$$

と因数分解される。

$x = 1$ が (I) を満たすとき、$x = 1$ を (I) に代入すると

$$6 - 11n + 3n^2 \leq 0 \Rightarrow (3 - n)(2 - 3n) \leq 0$$

この条件を満たす n は $\dfrac{2}{3} \leq n \leq 3$ となるが、n は整数であることから n の範囲は $\mathbf{1} \leq n \leq \mathbf{3}$ となる。

$x = 1$ が (II) を満たすとき

$$\begin{aligned} |3 \times 1 - 2n| \geq 2 &\Rightarrow 3 - 2n \geq 2 \text{ または } 3 - 2n \leq -2 \\ &\Rightarrow n \leq \frac{1}{2} \text{ または } \frac{5}{2} \leq n \end{aligned}$$

n は整数であるため、$n \leq \mathbf{0},\ \mathbf{3} \leq n.$

よって $x = 1$ が上の連立不等式を満たすとき n は「$1 \leq n \leq 3$」かつ「$n \leq 0,\ 3 \leq n$」となる整数である。このような整数は $n = \mathbf{3}$ のみ。

$n = 3$ のとき上の連立不等式は

$$\begin{cases} 6x^2 - 33x + 27 & \leq & 0 & \cdots (\mathrm{I}) \\ |3x - 6| & \geq & 2 & \cdots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

となる。

$$6x^2 - 33x + 27 = 3(x-1)(2x-9)$$

より

$$6x^2 - 33x + 27 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{2}$$

一方

$$\begin{aligned} |3x-6| \geq 2 \quad &\Rightarrow \quad 3x-6 \geq 2 \text{ または } 3x-6 \leq -2 \\ &\Rightarrow \quad x \leq \frac{4}{3} \text{ または } \frac{8}{3} \leq x \end{aligned}$$

$1 < \frac{4}{3} < \frac{8}{3} < \frac{9}{2}$ より、(I)、(II) が共に成り立つ範囲は

$$\mathbf{1} \leq x \leq \mathbf{\frac{4}{3}},\ \mathbf{\frac{8}{3}} \leq x \leq \mathbf{\frac{9}{2}}$$