数学１

第２問

a, b を実数とし、x の二つの２次関数

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3x^2-2x-1 \quad \cdots \\ y &=& x^2+2ax+b \quad \cdots \end{array}$$

のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。
以下では G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。　このとき

$$b = \textbf{(ア)}a^2 + \textbf{(イ)}a - \textbf{(ウ)}$$

であり、G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a, \textbf{(エ)}a^2 + 2a - \textbf{(オ)}\right)$$

となる。

$$x^2+2ax+b = (x+a)^2 + b - a^2$$

より G_2 の頂点は $(-a, b-a^2)$. この点が G_2 上にあるとき

$$b - a^2 = 3a^2 + 2a - 1$$

これより

$$b = \mathbf{4}a^2 + \mathbf{2}a - \mathbf{1}$$

という式が成り立つ。また G_2 の頂点は $(-a,\ \mathbf{3}a^2+2a-\mathbf{1})$ となる。

(1) G_2 の頂点の y 座標は、$a=\dfrac{\textbf{(カキ)}}{\textbf{(ク)}}$ のとき、最小値 $\dfrac{\textbf{(ケコ)}}{\textbf{(サ)}}$ をとる。$a=\dfrac{\text{(カキ)}}{\text{(ク)}}$ のとき、G_2 の軸は直線 $x=\dfrac{\textbf{(シ)}}{\textbf{(ス)}}$ であり、G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{\textbf{(セ)}\pm\textbf{(ソ)}\sqrt{\textbf{(タ)}}}{\textbf{(チ)}}$$

である。

(2) G_2 が点 $(0,5)$ を通るとき、$a=\textbf{(ツ)},\dfrac{\textbf{(テト)}}{\textbf{(ナ)}}$ である。
$a=$（ツ）のとき、G_2 を x 軸方向に **(ニ)** 、y 軸方向にも同じく（ニ）だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし（ニ）は 0 でない数とする。

---

(1)

$$3a^2+2a-1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

より G_2 の頂点は $a=-\dfrac{1}{3}\ \left(\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\right)$ のとき最小値 $-\dfrac{4}{3}\ \left(\dfrac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}\right)$ をとる。$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき G_2 の軸は $x=-a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ である。
次に b の値を求める。G_2 は $x=-a$ のとき最小値 $b-a^2$ をとるため

$$b-a^2=-\frac{4}{3}\Rightarrow b=a^2-\frac{4}{3}=-\frac{11}{9}$$

よって G_2 の式は

$$y=x^2+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)x-\frac{11}{9}=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}$$

となる。よって G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}=0\Rightarrow 9x^2-6x-11=0$$

の解になる。つまり求める x 座標は

$$\frac{\mathbf{1}\pm\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

(2) G_2 が点 $(0,5)$ を通るとき、

$$0^2+2a\times 0+b=5\Rightarrow b=5$$

この値を $b=4a^2+2a-1$ に代入すると

$$4a^2+2a-1=5\Rightarrow a=\mathbf{1},-\frac{3}{2}\quad\left(\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}\right)$$

$a=1$ のとき G_2 の頂点は $-a=-1,\ b-a^2=5-(-1)^2=4$ より $(-1,\ 4)$. G_2 を x 軸、y 軸方向に p ずつ平行移動すると頂点は $(-1+p,\ 4+p)$ になる。この頂点が G_1 上にあるとき

$$\begin{aligned}
&4+p=3(-1+p)^2-2(-1+p)-1\\
\Rightarrow\ &3p^2-9p=0\\
\Rightarrow\ &p=0,\ 3
\end{aligned}$$

$p\neq 0$ より $p=\mathbf{3}$