

数学 1

第 3 問

$\triangle ABC$ において $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{13}$, $CA = \sqrt{10}$ とする。このとき

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{(\text{ア})}}{(\text{イウ})}, \quad \sin \angle BAC = \frac{(\text{エ})\sqrt{(\text{オ})}}{(\text{カキ})}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$ である。

(1) 円 O を $\triangle ABC$ の外接円とする。円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 S を $\angle BAS = 45^\circ$ となるようにとる。また、円 O の点を B 含まない弧 AC 上に点 T を $\angle BCT = 45^\circ$ となるようにとる。

このとき、 $\angle SCT = (\text{コサ})^\circ$ であり、 $ST = \frac{(\text{シ})\sqrt{(\text{スセ})}}{(\text{ソ})}$ である。

また、 $BT = \frac{(\text{タ})\sqrt{(\text{チツ})}}{(\text{テ})}$ である。

余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$$

これより

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{5 + 10 - 13}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{2}{10\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - (\cos \angle BAC)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{100}} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

また $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

円 O を $\triangle ABC$ の外接円とする。円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 S を $\angle BAS = 45^\circ$ となるようにとる。また、円 O の点を B 含まない弧 AC 上に点 T を $\angle BCT = 45^\circ$ となるようにとる。

円周角の定理から

$$\angle BOS = 2 \times \angle BAS = 90^\circ$$

$$\angle BOT = 2 \times \angle BCT = 90^\circ$$

よって $\angle SOT = \angle SOB + \angle BOT = 180^\circ$ となるため $\angle SCT = \frac{1}{2}\angle SOT = \mathbf{90^\circ}$
 $\angle SOT = 180^\circ$ から ST は円 O の直径になる。正弦定理から

$$ST = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{13}}{7\sqrt{2}/10} = \frac{10\sqrt{13}}{7\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{5\sqrt{26}}}{\mathbf{7}}$$

また $ST = \frac{BT}{\sin \angle BCT}$ より $BT = ST \times \sin \angle BCT = \frac{5\sqrt{26}}{7} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{5\sqrt{13}}}{\mathbf{7}}$

(2) $\triangle ABC$ を底面とし P を頂点とする三角錐 $PABC$ を考える。3 辺 PA, PB, PC が互いに直交しているとき、

$$PA = (\text{ト}), PB = (\text{ナ}), BC = (\text{ニ})$$

である。また、点 P から $\triangle ABC$ におろした垂線の長さは $\frac{(\text{ヌ})}{(\text{ネ})}$ である。

点 P は $\angle APB = \angle CPA = 90^\circ$ が成り立つ点である。 $\triangle PAB, \triangle BAC$ について $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$ であることから

$$PB = \sqrt{5 - PA^2}, PC = \sqrt{10 - PA^2}$$

また $\angle CPA = 90^\circ$ であることから $PB^2 + PC^2 = BC^2$. よって

$$5 - PA^2 + 10 - PA^2 = 13 \Rightarrow 15 - 2PA^2 = 13 \Rightarrow PA^2 = 1$$

$PA > 1$ より $PA = 1$. これより $PB = 2, PC = 3$ となる。

点 P から $\triangle ABC$ におろした垂線の長さを h とする。このとき、三角錐の体積は $\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times h$ と表すことができる。 $\triangle ABC = \frac{7}{2}$ となるため体積は $\frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times h = \frac{7}{6}h$ となる。

一方、この三角錐の体積は $\frac{1}{3} \times \triangle PAB \times PC$ と表すこともできる。

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3, PC = 3$$

より、この体積は $\frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$ となる。よって $\frac{7}{6}h = 3 \Rightarrow h = \frac{6}{7}$