数学 1 A

第 1 問

[1] $\alpha = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ とする。 α の分母を有理化すると

$$\alpha = \frac{(\text{ア}) - \sqrt{(\text{イウ})}}{(\text{エ})}$$

となる。

2 次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{(\text{オ})}{(\text{カ})}, (\text{キ})$$

である。

次の 0 . ~ 3 . の数のうち最も小さいものは (ク) である

$$\begin{array}{ll} 0. \frac{(\text{ア}) - \sqrt{(\text{イウ})}}{(\text{エ})} & 1. \frac{(\text{エ})}{(\text{ア}) - \sqrt{(\text{イウ})}} \\ 2. \frac{(\text{オ})}{(\text{カ})} & 3. (\text{キ}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{7 - 2\sqrt{21} + 3}{7 - 3} \\ &= \frac{10 - 2\sqrt{21}}{4} \\ &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

$6x^2 - 7x + 1 = (6x - 1)(x - 1)$ より $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{1}{6}, 1$

$4 < \sqrt{21} < 5$ より $5 - \sqrt{21} < 2$ であるため $\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < 1$ 、よって $\frac{2}{5 - \sqrt{21}} > 1 > \frac{1}{6}$

。このため 4 つの数のうち最も小さいものは $\frac{1}{6}, \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ のいずれかである。

$\frac{1}{6} - \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{21} - 14}{6}$ について、

$$(3\sqrt{21})^2 = 189, 14^2 = 196$$

より

$$\frac{1}{6} - \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{21} - 14}{6} < 0 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

よって最も小さい数は2 . の $\frac{1}{6}$

[2] 次の (ケ) ~ (サ) に当てはまるものを、下の 0 . ~ 3 . のうちから一つずつ選べ。
ただし、同じものを繰り返して選んでもよい。また (シ) に当てはまるものを、下の 4 . ~
7 . のうちから一つ選べ。

自然数 n に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

p : n は 5 で割ると 1 余る数である。

q : n は 10 で割ると 1 余る数である。

r : n は奇数である。

s : n は 2 より大きい素数である。

また、条件 r の否定を $\bar{r}$ 、条件 s の否定を $\bar{s}$ で表す。このとき

「 p かつ r 」は q であるための (ケ)。

$\bar{r}$ は $\bar{s}$ であるための (コ)。

「 p かつ s 」は「 q かつ s 」であるための (サ)。

0 . 必要十分条件である

1 . 必要条件であるが、十分条件でない

2 . 十分条件であるが、必要条件でない

3 . 必要条件でも十分条件でもない

自然数全体の集合を全体集合 U とし、条件 p を満たす自然数全体の集合を P 、条件 r を
満たす自然数全体の集合を R 、条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると、 P, R, S の
関係を表す図は (シ) である。(図を表示できないためここでは P, R, S の関係を書きます)

4 . $P \cap R \neq \phi, R \cap S \neq \phi, S \subseteq P$

5 . $P \cap R \neq \phi, S \subseteq R, P \cap S \neq \phi$

6 . $P \cap R \neq \phi, S \subseteq R, P \cap S = \phi$

7 . $P \cap R \neq \phi, S \cap R \neq \phi, P \cap S = \phi$

「 p かつ r 」と q について

(「 p かつ r 」 $\Rightarrow q$) の証明

条件 p が成り立つ自然数は $n = 5m + 1$ (m : 0 以上の整数) と表すことができる。

m が偶数のとき、 $m = 2m'$ (m' : 整数) となるため、 $n = 10m' + 1$ は奇数になる。

m が奇数のとき、 $m = 2m' + 1$ (m' : 整数) となるため、 $n = 10m' + 6$ は偶数になる。

このため、 p の条件が成り立ちかつ r (n が奇数) の条件が成り立つのは $n = 10m' + 1$ (m' :
整数) と表されるときのみとなる。よって n は 10 で割ると 1 余る数である。

($q \Rightarrow$ 「 p かつ r 」) の証明

条件 q が成り立つ自然数は $n = 10m + 1$ (m : 0 以上の整数) と表すことができる。

$$n = 5(2m) + 1 = 2(5m) + 1$$

が成り立つため、 n は 5 で割ると 1 余る数であり、2 で割ると 1 余る数 (つまり奇数) である。
よって n は「 p かつ r 」の条件を満たす。

「 p かつ r 」 $\Leftrightarrow q$ が成り立つため「 p かつ r 」は q であるための必要十分条件 (0 .) である。

$\bar{r}$: n は奇数でない、つまり偶数である。

$\bar{s}$: n は 2 より大きい素数でない。

($\bar{r} \Rightarrow \bar{s}$) の証明

自然数 n が偶数のとき、 $n = 2$ または 4 以上の偶数である。 $n = 2$ のときは $\bar{s}$ の条件が成り立つ。また 4 以上の偶数であるときも 2 を約数に持つため n は素数でない。よって条件 $\bar{s}$ が成り立つ。

($\bar{s} \Rightarrow \bar{r}$) の反例

$n = 9$ は 2 より大きい素数でないが奇数である。

以上より $\bar{r} \Rightarrow \bar{s}$ は成り立つが、 $\bar{s} \Rightarrow \bar{r}$ は成り立たないため $\bar{r}$ は $\bar{s}$ であるための十分条件であるが、必要条件でない (2 .)

「 p かつ s 」と「 q かつ s 」については上の 2 つの問題から証明することができる。

(「 p かつ s 」 $\Rightarrow$ 「 q かつ s 」) の証明

$\bar{r} \Rightarrow \bar{s}$ の対偶をとると $s \Rightarrow r$ となるため、

「 p かつ s 」 $\Rightarrow$ 「 p かつ r 」 $\Rightarrow q$ (後半は 1 番目の必要十分条件から)

また「 p かつ s 」 $\Rightarrow s$ も成り立つため「 p かつ s 」 $\Rightarrow$ 「 q かつ s 」が成り立つ。

(「 q かつ s 」 $\Rightarrow$ 「 p かつ s 」) の証明

1 番目の必要十分条件から

「 q かつ s 」 $\Rightarrow$ 「「 p かつ r 」かつ s 」 $\Rightarrow$ 「 p かつ s 」

「 p かつ s 」 $\Leftrightarrow$ 「 p かつ s 」が成り立つため「 p かつ s 」は「 p かつ s 」であるための必要十分条件 (0 .) である。

P, R, S の包含関係について、 $\bar{r} \Rightarrow \bar{s}$ の対偶 $s \Rightarrow r$ より $S \subseteq R$ が成り立つ。 $n = 11$ は p, s 2 つの条件を満たすため $P \cup S \neq \phi$ が成り立つ。

以上 2 つの包含関係を満たすものは 5 . である。