

数学 1 A

第 2 問

a, b を実数とし、 x の二つの 2 次関数

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 2x - 1 \quad \cdots (\text{I}) \\ y &= x^2 + 2ax + b \quad \cdots (\text{II}) \end{aligned}$$

のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。
以下では G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。 このとき

$$b = (\text{ア})a^2 + (\text{イ})a - (\text{ウ})$$

であり、 G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$(-a, (\text{エ})a^2 + 2a - (\text{オ}))$$

となる。 _____

$$x^2 + 2ax + b = (x + a)^2 + b - a^2$$

より G_2 の頂点は $(-a, b - a^2)$. この点が G_1 上にあるとき

$$b - a^2 = 3a^2 + 2a - 1$$

これより

$$b = 4a^2 + 2a - 1$$

という式が成り立つ。また G_2 の頂点は $(-a, 3a^2 + 2a - 1)$ となる。

(1) G_2 の頂点の y 座標は、 $a = \frac{(\text{カキ})}{(\text{ク})}$ のとき、最小値 $\frac{(\text{ケコ})}{(\text{サ})}$ をとる。 $a = \frac{(\text{カキ})}{(\text{ク})}$ のとき、 G_2 の軸は直線 $x = \frac{(\text{シ})}{(\text{ス})}$ であり、 G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{(\text{セ}) \pm (\text{ソ})\sqrt{(\text{タ})}}{(\text{チ})}$$

である。

(2) G_2 が点 $(0, 5)$ を通るとき、 $a = (\text{ツ}), \frac{(\text{テト})}{(\text{ナ})}$ である。

$a = (\text{ツ})$ のとき、 G_2 を x 軸方向に (ニ) 、 y 軸方向にも同じく (ニ) だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし (ニ) は 0 でない数とする。

(1)

$$3a^2 + 2a - 1 = 3\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

より G_2 の頂点は $a = -\frac{1}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)$ のとき最小値 $-\frac{4}{3} \left(\frac{-4}{3}\right)$ をとる。 $a = -\frac{1}{3}$ のとき G_2 の軸は $x = -a = \frac{1}{3}$ である。

次に b の値を求める。 G_2 は $x = -a$ のとき最小値 $b - a^2$ をとるため

$$b - a^2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow b = a^2 - \frac{4}{3} = -\frac{11}{9}$$

よって G_2 の式は

$$y = x^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)x - \frac{11}{9} = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9}$$

となる。よって G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 6x - 11 = 0$$

の解になる。つまり求める x 座標は

$$\frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

(2) G_2 が点 $(0, 5)$ を通るとき、

$$0^2 + 2a \times 0 + b = 5 \Rightarrow b = 5$$

この値を $b = 4a^2 + 2a - 1$ に代入すると

$$4a^2 + 2a - 1 = 5 \Rightarrow a = 1, -\frac{3}{2} \left(\frac{-3}{2}\right)$$

$a = 1$ のとき G_2 の頂点は $-a = -1$, $b - a^2 = 5 - (-1)^2 = 4$ より $(-1, 4)$. G_2 を x 軸、 y 軸方向に p ずつ平行移動すると頂点は $(-1 + p, 4 + p)$ になる。この頂点が G_1 上にあるとき

$$\begin{aligned} 4 + p &= 3(-1 + p)^2 - 2(-1 + p) - 1 \\ \Rightarrow 3p^2 - 9p &= 0 \\ \Rightarrow p &= 0, 3 \end{aligned}$$

$p \neq 0$ より $p = 3$.