数学１A

第３問

$\triangle ABC$ を $AB=3,\ BC=4,\ CA=5$ である直角三角形とする。
(1) $\triangle ABC$ の内接円の中心を O とし、円 O が３辺 $BC,\ CA,\ AB$ と接する点をそれぞれ $P,\ Q,\ R$ とする。このとき、$OP=OR=$ **(ア)** である。また、$QR=\dfrac{\textbf{(イ)}\sqrt{\textbf{(ウ)}}}{\textbf{(エ)}}$ であり、$\sin\angle QPR=\dfrac{\textbf{(オ)}\sqrt{\textbf{(カ)}}}{\textbf{(キ)}}$ である。

$\triangle ABC$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$. 一方 $\triangle ABC$ を $\triangle OBC,\ \triangle OCA,\ \triangle OAB$ の３つの三角形に分ける。点 $P,\ Q,\ R$ はそれぞれ３辺 $BC,\ CA,\ AB$ の接点であるため

$$\angle OPB=\angle OQC=\angle ORA=90^\circ.$$

このことから３つの三角形の面積の合計を求めると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\times OP\times BC+\frac{1}{2}\times OQ\times CA+\frac{1}{2}\times OR\times AB\\
=\ &\frac{1}{2}\times OP\times BC+\frac{1}{2}\times OP\times CA+\frac{1}{2}\times OP\times AB\\
=\ &\frac{1}{2}\times OP\,(BC+CA+AB)\\
=\ &\frac{1}{2}\times OP\times(3+4+5)\\
=\ &6\,OP
\end{aligned}$$

ともに面積は等しいため

$$6\,OP=6\Rightarrow OP=\mathbf{1}=OR$$

四角形 $OPBR$ について、４つの角のうち $\angle OPB,\ \angle ORB,\ \angle PBR$ の３つが直角であり、更に $OP=OR$ であることから四角形 $OPBR$ は正方形。よって $BP=BR=OP=OR=1$ が成り立つ。$AB,\ AC$ は円 O の接線であるため、

$$AQ=AR=AB-RB=3-1=2$$

また $\cos\angle QAR=\cos\angle CAB=\dfrac{3}{5}$. 以上から余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}
QR^2 &= AR^2+AQ^2-2AR\cdot AQ\cdot\cos\angle QAR\\
&= 2^2+2^2-4\times 2\times 2\times\frac{3}{5}\\
&= 8-\frac{24}{5}\\
&= \frac{16}{5}
\end{aligned}$$

$QR>0$ より $QR=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{\mathbf{4\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$. 円 O は $\triangle PQR$ の外接円であるため、正弦定理を使うと

$$2OP=\frac{QR}{\sin\angle QPR}\Rightarrow\sin\angle QPR=\frac{QR}{2OP}=\frac{\mathbf{2\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$$

(2) 円 O と線分 AP との交点のうち P と異なる方を S とする。このとき、$AP = \sqrt{\textbf{(クケ)}}$ であり、$SP = \dfrac{\textbf{(コ)}\sqrt{\textbf{(サシ)}}}{\textbf{(ス)}}$ である。また、点 S から辺 BC へ垂線を下ろし、垂線と BC との交点を H とする。このとき

$$HP = \frac{\textbf{(セ)}}{\textbf{(ソ)}},\ SH = \frac{\textbf{(タ)}}{\textbf{(チ)}}$$

である。したがって、$\tan \angle BCS = \dfrac{\textbf{(ツ)}}{\textbf{(テ)}}$ である。

(3) 円 O 上に点 T を線分 RT が円 O の直径となるようにとる。このとき、$\tan \angle BCT = \dfrac{\textbf{(ト)}}{\textbf{(ナ)}}$ である。よって、$\angle RSC = \textbf{(ニヌ)}^\circ$ であり、$\angle PSC = \textbf{(ネノ)}^\circ$ である。

$AB = 3$, $BP = 1$ より $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{\mathbf{10}}$. また AB と OP は平行であるため

$$\cos \angle OPS = \cos \angle BAP = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$\triangle OPS$ に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} OS^2 &= OP^2 + SP^2 - 2OP \cdot SP \cdot \cos \angle OPS \\ &= 1 + SP^2 - 2 \times SP \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ &= SP^2 - \frac{3\sqrt{10}}{5} SP + 1 \end{aligned}$$

$OS = 1$ より

$$SP^2 - \frac{3\sqrt{10}}{5} SP = 0 \Rightarrow SP = 0,\ \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$SP \neq 0$ より $SP = \dfrac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{5}}$.

$\triangle SHP$ と $\triangle ABP$ が相似であることから $PS : PA = HP : PB = SH : AB$ となるため

$$HP = \frac{PS \cdot PB}{PA} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

$$SH = \frac{PS \cdot AB}{PA} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}$$

$\tan \angle BCS = \tan \angle HCS = \dfrac{SH}{CH}$ である。$CH = CP + PH = (4-1) + \dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{5}$ となることから

$$\tan \angle BCS = \frac{9}{5}\Big/\frac{18}{5} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

円 O 上に点 T を線分 RT が円 O の直径となるようにとる。T から BC に垂線を下ろし、BC との交点を Z とする。このとき四角形 $OPZT$ が正方形になるため、$PZ = OT = 1$ が成り立つ。よって $ZC = CP - PZ = 3 - 1 = 2,\ TZ = 1.$ 以上より

$$\tan\angle BCT = \tan\angle ZCT = \frac{TZ}{ZC} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$\tan\angle BCS = \tan\angle BCT$ であるため、S, T, C は一直線上にある。よって $\angle RSC = \angle RST.$
RT は円 O の直径、S は円 O 上の点であるため $\angle RSC = \mathbf{90}^\circ$
円周角の定理から $\angle PSC = \dfrac{1}{2}\angle POT = \mathbf{45}^\circ$