

数学 1 A

第 4 問

袋の中に赤玉 5 個、白玉 5 個、黒玉 1 個の合計 11 個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ 1 から 5 までの数字が一つずつ書かれており、黒玉には何も書かれていない。なお、同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に 5 個の玉を取り出す。

5 個の玉の取り出し方は (アイウ) 通りある。

取り出した 5 個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が 2 組あれば得点は 2 点、1 組だけあれば得点は 1 点、1 組もなければ得点は 0 点とする。

(1) 得点が 0 点となる取り出し方のうち、黒玉が含まれているのは (エオ) 通りであり、黒玉が含まれていないのは (カキ) 通りである。

得点が 1 点となる取り出し方のうち、黒玉が含まれているのは (クケコ) 通りであり、黒玉が含まれていないのは (サシス) 通りである。

5 個の玉の取り出し方は

$${}_{11}C_5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462 \text{ 通りある。}$$

得点が 0 点となる取り出し方のうち、1 個が黒玉のとき、残りの 4 個の玉には同じ数字が書かれていない。残り 4 個の玉の取り出し方を次のような手順で行う。

- (i) 赤玉、白玉合計 10 個の中から 1 個を選ぶ。この選び方は 10 通り。
- (ii) 残り 9 個の玉から 2 個目を選ぶ。しかし (i) で選んだ玉と同じ数字の玉は選ぶことができない。よって 2 個目を選ぶことができるのは 8 個。選び方は 8 通り。
- (iii) 同じようにして 3 個目は 6 通り。4 個目は 4 通りの選び方がある。

以上より残り 4 個の玉を順番を考えて選ぶ方法は $10 \times 8 \times 6 \times 4$ 通りある。問題では順番を考えていないため、同じ数字が書かれていない 4 個の玉の取り出し方は

$$\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 80 \text{ 通り}$$

得点が 0 点となる取り出し方のうち、黒玉が含まれていないとき、5 個の玉の数字は全て異なる。上と同様の考え方から、5 個の玉の取り出し方は

$$\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 32 \text{ 通り}$$

得点が 1 点となると、同じ数字の赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。同じ数字を「5」とする。

黒玉が入っているとき、5 個の玉は

「黒玉」+「『5』の書かれた赤玉と白玉」+「同じ数字が書かれていない 2 個の玉」

となる。つまり上の組み合わせになる取り出し方は、残り 8 個の玉の中から「同じ数字が書かれていない 2 個の玉」の取り出し方と同じになる。よって取り出し方は

$$\frac{8 \times 6}{2 \times 1} = 24 \text{ 通り}$$

得点が 1 点となる同じ数字が「5」以外のときも同じく 24 通りずつの取り出し方があるため、全部で $24 \times 5 = 120$ 通りある。

同じ数字が「5」で黒玉を含まない場合、5 個の玉の組み合わせは

「『5』の書かれた赤玉と白玉」+「同じ数字が書かれていない 3 個の玉」

上と同様の考え方から、この取り出し方は

$$\frac{8 \times 6 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 32 \text{ 通り}$$

得点が 1 点となる同じ数字が「5」以外のときも同じく 32 通りずつの取り出し方があるため、全部で $32 \times 5 = 160$ 通りある。

（別の解法）

得点が 0 点で黒玉を含まない場合、5 個の玉に書かれてある数字は全て異なる。つまり 5 個の玉には 1 ~ 5 が 1 回ずつ書かれている。各数字に赤玉、白玉、どちらの玉を選ぶかで 2 通りずつあるため、取り出し方は $2^5 = 32$ 通りある。

他の取り出し方についても同様の考え方から計算することができる。

(2) 得点が 1 点である確率は $\frac{(\text{セソ})}{(\text{タチ})}$ であり、2 点である確率は $\frac{(\text{ツ})}{(\text{テト})}$ である。

また、得点の期待値は $\frac{(\text{ナニ})}{(\text{ヌネ})}$ である。

得点が 1 点になる確率は (1) より $\frac{120 + 160}{462} = \frac{280}{462} = \frac{20}{33}$ 。

同じく (1) より得点が 0 点となる確率は $\frac{80 + 32}{462} = \frac{112}{462} = \frac{8}{33}$ となるため、得点が 2 点となる確率は

$$1 - \frac{20}{33} - \frac{8}{33} = \frac{5}{33}.$$

以上より得点の期待値は

$$0 \times \frac{8}{33} + 1 \times \frac{20}{33} + 2 \times \frac{5}{33} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}$$