数学２

第１問

［１］連立方程式

$$(*)\begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots(\mathrm{I}) \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots(\mathrm{II}) \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y を求めよう。ただし $x \neq 1, y \neq 1$ とする。(I) の両辺で 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 x + \log_2 y = \textbf{(ア)}$$

が成り立つ。これと (II) より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = \textbf{(イウ)}$$

である。
したがって、$\log_2 x, \log_2 y$ は２次方程式

$$t^2 - \textbf{(エ)}t + \textbf{(オカ)} = 0 \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

の解である。(III) の解は $t =$ **(キ)**, **(ク)** である。ただし（キ）と（ク）は解答の順序を問わない。よって連立方程式 $(*)$ の解は $(x,\ y) = ($**(ケ)**, **(コサ)**$)$ または $(x,\ y) = ($**(コサ)**, **(ケ)**$)$ である。

(I) の両辺で 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 xy = \log_2 128 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 y = \mathbf{7}\ \cdots(\mathrm{IV})$$

また (II) の両辺に $(\log_2 x)(\log_2 y)$ を掛けると

$$\log_2 x + \log_2 y = \frac{7}{12}(\log_2 x)(\log_2 y)$$

この式と上の (IV) より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = 7 \times \frac{12}{7} = \mathbf{12}$$

$\log_2 x, \log_2 y$ の和と積が分かることから、$\log_2 x, \log_2 y$ は２次方程式

$$t^2 - \mathbf{7}t + \mathbf{12} = 0 \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

の解である。これより (III) の解は $t = \mathbf{3}, \mathbf{4}$ となる。よって

$$\begin{aligned} &(\log_2 x,\ \log_2 y) = (3,\ 4)\ \text{または}\ (4,\ 3) \\ \Rightarrow\ &(x,\ y) = (2^3,\ 2^4)\ \text{または}\ (2^4,\ 2^3) \end{aligned}$$

つまり、$(x,\ y) = (\mathbf{8},\ \mathbf{16})$ または $(\mathbf{16},\ \mathbf{8})$

［２］$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 4\theta = \cos\theta \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めてみよう。
　一般に、すべての x について

$$\cos x = \sin(\textbf{(シ)} - x)$$

である。（シ）に当てはまるものを、次の０．～２．のうちから一つ選べ

$$０．\ \pi \quad １．\ \frac{\pi}{2} \quad ２．\ -\frac{\pi}{2}$$

したがって、(I) が成り立つとき、$\sin 4\theta = \sin(（シ）- \theta)$ となり、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ, （シ）$-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば、$4\theta =$（シ）$- \theta$, $4\theta = \pi - (（シ）- \theta)$ となる。よって、(I) を満たす θ は $\theta = \dfrac{\pi}{\textbf{(ス)}}$ または $\theta = \dfrac{\pi}{\textbf{(セソ)}}$ である。

$\sin x$ と $\cos x$ については

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad （選択肢では\textbf{１．}）$$

の関係がある。よって (I) が成り立つとき $\sin 4\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ となる。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であることから

$$0 < 4\theta < 2\pi,\ 0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$$

よって $\sin 4\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ が成り立つのは

$$4\theta = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ または } 4\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

となる。よって $\theta = \dfrac{\pi}{\mathbf{6}}$ または $\theta = \dfrac{\pi}{\mathbf{10}}$

$\sin\dfrac{\pi}{(\text{ス})} = \dfrac{\textbf{(タ)}}{\textbf{(チ)}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{(\text{セソ})}$ の値を求めよう。(I) より

$$\textbf{(ツ)}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となり、この式の左辺を2倍角の公式を用いて変形すれば

$$\left(\textbf{(テ)}\sin\theta - \textbf{(ト)}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であるから

$$(\text{ト})\sin^3\theta - (\text{テ})\sin\theta + 1 = 0$$

が成り立つ。$\sin\theta = \dfrac{(\text{タ})}{(\text{チ})}$ はを満たしている。$\theta = \dfrac{\pi}{(\text{セソ})}$ とすると、$\sin\theta \neq \dfrac{(\text{タ})}{(\text{チ})}$ であるから

$$\textbf{(ナ)}\sin^2\theta + \textbf{(ニ)}\sin\theta - 1 = 0$$

となる。ここで $\sin\dfrac{\pi}{(\text{セソ})} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{(\text{セソ})} = \frac{\textbf{(ヌネ)} + \sqrt{\textbf{(ノ)}}}{\textbf{(ハ)}}$$

である。

$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{10}$ の値を求める。(I) に2倍角の公式を使うと

$$\mathbf{2}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となる。この式の左辺にさらに2倍角の公式を使うと

$$2\sin 2\theta\cos 2\theta = 2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)\left(1 - 2\sin^2\theta\right)$$

と変形できる。このことから (I) は

$$\left(\mathbf{4}\sin\theta - \mathbf{8}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であることから、両辺を $\cos\theta$ で割ると

$$4\sin\theta - 8\sin^3\theta = 1 \Rightarrow 8\sin^3\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$$

この方程式の左辺を因数分解すると

$$8\sin^3\theta - 4\sin\theta + 1 = (2\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1)$$

となる。$\sin\dfrac{\pi}{10} \neq \dfrac{1}{2}$ つまり $2\sin\dfrac{\pi}{10} - 1 \neq 0$ であるから $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ は

$$\mathbf{4}\sin^2\theta + \mathbf{2}\sin\theta - 1 = 0$$

を満たす。よって

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ここで $\sin\dfrac{\pi}{10} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\mathbf{-1 + \sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$$

である。