

数学 2

第 2 問

k を実数とし、座標平面上に点 $P(1, 0)$ をとる。曲線

$$y = -x^3 + 9x^2 + kx$$

を C とする。

(1) 点 $Q(t, -t^3 + 9t^2 + kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$-(ア)t^3 + (イウ)t^2 - (エオ)t = k$$

が成り立つ。

$$p(t) = -(ア)t^3 + (イウ)t^2 - (エオ)t$$

とおくと、関数 $p(t)$ は $t = (カ)$ で極小値 $(キク)$ をとり、 $t = (ケ)$ で極大値 $(コ)$ をとる。

したがって、点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本となるのは、 k の値が $(サ)$ または $(シス)$ のときである。また、点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k = 5$ のとき $(セ)$ 本、 $k = -2$ のとき $(ソ)$ 本、 $k = -12$ のとき $(タ)$ 本となる。

$$y' = -3x^2 + 18x + k$$

より点 Q における曲線 C の接線の傾きは $-3t^2 + 18t + k$ 。よって接線の式は

$$\begin{aligned} y &= (-3t^2 + 18t + k)(x - t) - t^3 + 9t^2 + kt \\ &= (-3t^2 + 18t + k)x + 2t^3 - 9t^2 \end{aligned}$$

この接線が点 P を通るとき

$$\begin{aligned} (-3t^2 + 18t + k) + 2t^3 - 9t^2 &= 0 \\ \Rightarrow 2t^3 - 12t^2 + 18t + k &= 0 \\ \Rightarrow -2t^3 + 12t^2 - 18t &= k \end{aligned}$$

$$p(t) = -2t^3 + 12t^2 - 18t$$

と置いたとき

$$p'(t) = -6t^2 + 24t - 18 = -6(t - 1)(t - 3)$$

であることから $p(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$		極小		極大	

以上より $p(t)$ は $t = 1$ で極小値 $p(1) = -8$ をとり、 $t = 3$ で極大値 $p(4) = 0$ をとる。

点 P を通る曲線 C の接線の本数は 2 つの関数 $y = -2t^3 + 12t^2 - 18t$, $y = k$ の交点の数と等しい。上の増減表から交点の数は以下の通りになる。

$k > 0$	のとき	1 本
$k = 0$	のとき	2 本
$-4 < k < 0$	のとき	3 本
$k = -4$	のとき	2 本
$k < -4$	のとき	1 本

以上より接線の本数がちょうど 2 本となるのは $k = 0$ または -4 のとき。点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k = 5$ のとき 1 本、 $k = -2$ のとき 3 本、 $k = -12$ のとき 1 本となる。

(2) $k = 0$ とする。曲線

$$y = -x^3 + 6x^2 + 7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は (チ) と $\frac{(\text{ツ})}{(\text{テ})}$ である。

$-1 \leq x \leq 2$ の範囲において、2 曲線 C, D および 2 直線 $x = -1, x = 2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\frac{(\text{トナ})}{(\text{ニ})}$ である。

$k = 0$ のとき曲線 C の式は $y = -x^3 + 9x^2$ 。曲線 D との交点の x 座標は方程式

$$-x^3 + 9x^2 = -x^3 + 6x^2 + 7x \Rightarrow 3x^2 - 7x = 0$$

の解である。 $3x^2 - 7x = x(3x - 7)$ より求める x 座標は 0 と $\frac{7}{3}$ である。

$-1 \leq x \leq 2$ において

$$-1 \leq x \leq 0 \quad \text{のとき} \quad -x^3 + 9x^2 \geq -x^3 + 6x^2 + 7x$$

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{のとき} \quad -x^3 + 9x^2 \leq -x^3 + 6x^2 + 7x$$

$-1 \leq x \leq 0$ で C, D および直線 $x = -1$ で囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(-x^3 + 9x^2) - (-x^3 + 6x^2 + 7x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (3x^2 - 7x) dx \\ &= \left[x^3 - \frac{7}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 2$ で C, D および直線 $x = 2$ で囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{(-x^3 + 6x^2 + 7x) - (-x^3 + 9x^2)\} dx \\ &= \int_0^2 (-3x^2 + 7x) dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

以上より 2 つの図形の合計は $\frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}$ 。