

数学 2

第 3 問

座標平面上の直線 $y = -x$ を l で表す。2 点 $A(2, 0)$, $B(2, 2)$ と直線 l 上の点 $P(s, -s)$ を考える。ただし、 $s \neq 2$ とする。

3 点 A, B, P を通る円 C の中心 Q は直線 $y = (\text{ア})$ 上にある。点 Q の x 座標を t とおき、 AQ^2, PQ^2 を s, t を用いて表すと

$$\begin{aligned} AQ^2 &= t^2 - (\text{イ})t + (\text{ウ}) \\ PQ^2 &= t^2 - (\text{エ})st + (\text{オ})s^2 + (\text{カ})s + (\text{キ}) \end{aligned}$$

である。

3 点 A, B, P を通る円 C の中心 Q は線分 AB, BP, AP の各垂直二等分線の交点になる。 AB の垂直二等分線は $y = 1$ になるため、 Q はこの直線上にある。

点 Q の x 座標を t とおくと、 Q の座標は $(t, 1)$ と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} AQ^2 &= (2-t)^2 + (0-1)^2 \\ &= t^2 - 4t + 5 \\ PQ^2 &= (s-t)^2 + (-s-1)^2 \\ &= s^2 - 2st + t^2 + s^2 + 2s + 1 \\ &= t^2 - 2st + 2s^2 + 2s + 1 \end{aligned}$$

一方、 $s \neq t$ のとき、直線 PQ の傾きは

$$\frac{(\text{ク})+s}{t-s}$$

である。

円 C が直線 l と接するときの s の値と円 C の方程式を求めよう。円 C と直線 l が接するとき、直線 PQ と直線 l は垂直であるから、

$$\frac{(\text{ク})+s}{t-s} = (\text{ケ})$$

となり、

$$t = (\text{コ})s + (\text{サ})$$

と表せる。さらに、 $AQ^2 = PQ^2$ であることより

$$s = (\text{シ}), (\text{ス})$$

となる。ただし $(\text{シ}) < (\text{ス})$ とする。 $s = (\text{シ})$ のとき、円の方程式は

$$(x - (\text{セ}))^2 + (y - (\text{ソ}))^2 = (\text{タ})$$

であり、また $s = (\text{ス})$ のとき、円 C の方程式は

$$(x - (\text{チ}))^2 + (y - (\text{ツ}))^2 = (\text{テト})$$

である。

$s \neq t$ のとき、直線 PQ の傾きは

$$\frac{1 - (-s)}{t - s} = \frac{1 + s}{t - s}.$$

円 C が直線 l と接するとき、2 直線 PQ と l が垂直に交わるため、2 つの直線の傾きの積は -1 。よって

$$(-1) \times \frac{1 + s}{t - s} = -1 \Rightarrow \frac{1 + s}{t - s} = 1 \Rightarrow t = 2s + 1.$$

$AQ^2 = PQ^2$ かつ $AQ > 0, PQ > 0$ であることから $AQ = PQ$ つまり $AQ - PQ = 0$.

$$\begin{aligned} AQ - PQ &= \{t^2 - 4t + 5\} - \{t^2 - 2st + 2s^2 + 2s + 1\} \\ &= 2s^2 - 2st + 2s + 4t - 4 \\ &= 2s^2 - 2s(2s + 1) + 2s + 4(2s + 1) - 4 \\ &= -2s^2 + 8s \\ &= -2s(s - 4) \end{aligned}$$

であるため、 $s = 0, 4$.

$s = 0$ のとき $t = 2 \times 0 + 1 = 1$ であるため中心 Q の座標は $(1, 1)$ 、半径の 2 乗 AQ^2 は

$$AQ^2 = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$$

となるため円の方程式は

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

$s = 4$ のとき $t = 2 \times 4 + 1 = 9$ であるため中心 Q の座標は $(9, 1)$ 、半径の 2 乗 AQ^2 は

$$AQ^2 = 9^2 - 4 \times 9 + 5 = 50$$

となるため円の方程式は

$$(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 50.$$