数学 2

第4問

a, b を実数とし、x の 3 次式

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - ax^2 - bx - 1 + a + b \\ Q(x) &= x^3 - 2bx^2 - 4(1-a-b)x - 8a \end{aligned}$$

を考える。

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ を a, b について整理すると

$$\begin{aligned} P(x) &= -\left(x^2 - \textbf{(ア)}\right) a - \left(x - \textbf{(イ)}\right) b + x^3 - 1 \\ Q(x) &= 4\left(x - \textbf{(ウ)}\right) a - 2\left(x^2 - \textbf{(エ)}x\right) b + x^3 - 4x \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} P(x) &= \Big(x - \textbf{(オ)}\Big)\Big\{x^2 + \Big(1 - \textbf{(カ)}\Big)x + 1 - a - b\Big\} \\ Q(x) &= \Big(x - \textbf{(キ)}\Big)\Big\{x^2 + 2\Big(1 - \textbf{(ク)}\Big)x + \textbf{(ケコ)}\Big\} \end{aligned}$$

と因数分解される。

$P(x)$ と $Q(x)$ を a, b について整理すると

$$\begin{aligned} P(x) &= -\left(x^2 - \mathbf{1}\right) a - \left(x - \mathbf{1}\right) b + x^3 - 1 \\ Q(x) &= 4\left(x - \mathbf{2}\right) a - 2\left(x^2 - \mathbf{2}x\right) b + x^3 - 4x \end{aligned}$$

であるので $P(x)$ は

$$\begin{aligned} P(x) &= -(x-1)(x+1)a - (x-1)b + (x-1)(x^2+x+1) \\ &= (x-1)\left\{-(x+1)a - b + (x^2+x+1)\right\} \\ &= (x-\mathbf{1})\left\{x^2 + (1-\mathbf{a})x + 1 - a - b\right\} \end{aligned}$$

と因数分解される。一方 $Q(x)$ は

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4(x-2)a - 2x(x-2)b + x(x-2)(x+2) \\ &= (x-2)\left\{4a - 2xb + x(x+2)\right\} \\ &= (x-\mathbf{2})\left\{x^2 + 2(1-\mathbf{b})x + \mathbf{4a}\right\} \end{aligned}$$

と因数分解される。

(2) 虚数 α が $P(\alpha)=0$ と $Q(\alpha)=0$ を満たすとき

$$\begin{aligned}\alpha^2+\Big(1-\text{(カ)}\Big)\alpha+1-a-b &= 0\\ \alpha^2+2\Big(1-\text{(ク)}\Big)\alpha+\text{(ケコ)} &= 0\end{aligned}$$

であるので、α は

$$\Big(\textbf{(サシ)}-a+2b\Big)\alpha+1-\textbf{(スセ)}-b=0$$

を満たす。ここで a, b が実数であり、かつ α が虚数であることから

$$a=\frac{\textbf{(ソ)}}{\textbf{(タチ)}},\ b=\frac{\textbf{(ツ)}}{\text{(タチ)}}$$

である。

このとき、方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解の逆数は 2 次方程式

$$x^2-\frac{\textbf{(テ)}}{\textbf{(ト)}}x+\frac{\textbf{(ナニ)}}{\textbf{(ヌ)}}=0$$

の解である。

$$P(x)=0\Rightarrow x=1\text{ または }x^2+(1-a)x+1-a-b=0$$

であるため、虚数 α が $P(\alpha)=0$ を満たすとき

$$\alpha^2+(1-a)\alpha+1-a-b=0\cdots\cdots\text{(I)}$$

同様に

$$Q(x)=0\Rightarrow x=2\text{ または }x^2+2(1-b)x+4a=0$$

であるため、$Q(\alpha)=0$ も満たすとき

$$\alpha^2+2(1-b)\alpha+4a=0\cdots\cdots\text{(II)}$$

(I), (II) の両辺の差をとると

$$(\mathbf{-1}-a+2b)\alpha-\mathbf{5a}-b=0$$

a, b は実数、α は虚数であるため

$$\begin{cases}-a+2b-1 &= 0\\ -5a-b+1 &= 0\end{cases}\ \Rightarrow\ a=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}},\ b=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}.$$

このとき方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解は (I) に上の a, b を代入した式

$$\alpha^2+\frac{10}{11}\alpha+\frac{4}{11}=0$$

の解となる。この方程式の解を α_1, α_2 とすると

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{10}{11},\ \alpha_1\alpha_2=\frac{4}{11}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}=-\frac{5}{2},\ \frac{1}{\alpha_1}\times\frac{1}{\alpha_2}=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{11}{4}$$

以上から $\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{1}{\alpha_2}$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-\boldsymbol{\frac{5}{2}}x+\boldsymbol{\frac{11}{4}}=0$$

である。