数学２B

第３問

自然数の列 1, 2, 3, 4, $\cdots$ を、次のように群に分ける。

$$\underset{\text{第 1 群}}{1} \ \ \Big| \ \ \underset{\text{第 2 群}}{2,\ 3,\ 4,\ 5} \ \ \Big| \ \ \underset{\text{第 3 群}}{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12} \ \ \Big| \ \cdots$$

ここで、一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 12,\ a_4 =$ **(アイ)** である。

$$a_n - a_{n-1} = \textbf{(ウ)}n - \textbf{(エ)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立ち

$$a_n = \frac{\textbf{(オ)}}{\textbf{(カ)}}n^{\textbf{(キ)}} - \frac{\textbf{(ク)}}{\textbf{(ケ)}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。

よって、600 は第 **(コサ)** 群の小さいほうから **(シス)** 番目の項である。

第 4 群は 13 から $3 \times 4 - 2 = 10$ 個の数が入っているため、最後の数は $a_4 = 13 + 10 - 1 = \mathbf{22}$.

$a_n - a_{n-1}$ は第 n 群の項数と等しいため、

$$a_n - a_{n-1} = \mathbf{3}n - \mathbf{2}$$

よって

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=2}^{n}(3k-2) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n}(3k-2) - (3 \times 1 - 2) \\ &= 1 + \frac{3}{2}n(n+1) - 2n - 1 \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n \end{aligned}$$

600 が第 $(n+1)$ 群に入っているとき $a_{n-1} < 600 \leq a_n$ が成り立ち、600 はこの群の中の $600 - a_{n-1}$ 番目の項である。

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1) < 600 \leq \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ \Rightarrow\ & 3(n-1)^2 - (n-1) < 1200 \leq 3n^2 - n \end{aligned}$$

$n = 21$ のとき

$$\begin{aligned} 3(n-1)^2 - (n-1) &= 1200 - 20 = 1180 < 1200 \\ 3n^2 - n &= 1323 - 21 = 1302 > 1200 \end{aligned}$$

となるため 600 は第 **21** 群の中の $600 - a_{n-1} = 600 - 590 = \mathbf{10}$ 番目の項である。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対し、第 $(n+1)$ 群の小さいほうから $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n = \frac{\textbf{(セ)}}{\textbf{(ソ)}} n^{\textbf{(タ)}} + \frac{\textbf{(チ)}}{\textbf{(ツ)}} n$$

であり

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\textbf{(テ)}}{\textbf{(ト)}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + \textbf{(ナ)}} \right)$$

が成り立つ。これより

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_n} = \frac{\textbf{(ニ)} n}{\textbf{(ヌ)} n + \textbf{(ネ)}} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる。

第 $(n+1)$ 群の小さいほうから $2n$ 番目の項を b_n で表すと $b_n - a_n = 2n$ が成り立つため

$$b_n = a_n + 2n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2n = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} n^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} n.$$

このとき

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

であることから

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + \mathbf{1}} \right)$$

これより

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{\mathbf{2} n}{\mathbf{3} n + \mathbf{3}}. \end{aligned}$$