数学２B

第４問

二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて 1 の平行六面体 $ABCD-EFGH$ があり、$\angle EAB=\angle DAB=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle EAD=\dfrac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{r}$ とおく。

　$0<a<1$, $0<b<1$ とする。辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X, 辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=$ **(ア)**, $\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{\textbf{(イ)}}{\textbf{(ウ)}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{XY}$ は a, b, $\vec{p}$, $\vec{r}$ を用いて $\overrightarrow{XY}=(1-$ **(エ)**$)\,\vec{p}+$ **(オ)**$\vec{r}$ と表される。

　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=$ **(カ)** である。

$\angle BAD$, $\angle BAE$ は直角であるため、$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\mathbf{0}$. $\angle EAD=\dfrac{\pi}{3}$ より

$$\vec{q}\cdot\vec{r}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|\times\cos\angle DAE=1\times1\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

　$AX:XB=a:(1-a)$ より $\overrightarrow{AX}=a\vec{p}$. 一方 $BY:YF=b:(1-b)$ より

$$\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BY}=\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BF}.$$

　$ABFE$ は平行四辺形であるため $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$. よって $\overrightarrow{AY}=\vec{p}+b\,\vec{r}$. 以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY}&=\overrightarrow{AY}-\overrightarrow{AX}\\&=(\vec{p}+b\,\vec{r})-a\vec{p}\\&=(1-\mathbf{a})\,\vec{p}+\mathbf{b}\vec{r}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{p}+\vec{q}$ より

$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$$

四角形 $AXZH$ について、AX と HZ、および AH と XZ が平行であることから平行四辺形。よって $XZ=AH$ となるため $\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{AH}=\vec{q}+\vec{r}$. 以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}&=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})\\&=\vec{p}\cdot(\vec{q}+\vec{r})+(\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})\\&=0+\vec{q}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{q}-\vec{r}\cdot\vec{r}\\&=||\vec{q}||^2-||\vec{r}||^2\\&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし、交点を K とする。 $\overrightarrow{EC}$ が三角形 XYZ の２辺と垂直であることから、**(キ)**$a+b=$ **(ク)** が成り立つ。

以下では、$b=\dfrac{1}{2}$ とする。このとき $a=\dfrac{\textbf{(ケ)}}{\textbf{(コ)}}$ である。$\overrightarrow{EK}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{EK}=c\overrightarrow{EC}$ と表すと、$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+c\overrightarrow{EC}$ である。一方、点 K は平面 α 上にあるから、$\overrightarrow{AK}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AX}+s\overrightarrow{XY}+t\overrightarrow{XZ}\\ &= \left(\frac{1}{\textbf{(サ)}}s+\frac{(\text{ケ})}{(\text{コ})}\right)\overrightarrow{p}+t\overrightarrow{q}+\left(\frac{1}{\textbf{(シ)}}s+t\right)\overrightarrow{r}\end{aligned}$$

と表される。これらより $c=\dfrac{\textbf{(ス)}}{\textbf{(セ)}}$ である。よって、点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{EK}|$ は $\dfrac{\textbf{(ソ)}\sqrt{\textbf{(タ)}}}{\textbf{(チ)}}$ となる。

直線 EC と平面 α が垂直に交わるとき $\overrightarrow{EC}$ が $\overrightarrow{XY}$ と垂直であることから、$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY} &= (\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot((1-a)\vec{p}+b\,\vec{r})\\ &= (1-a)||\vec{p}||^2+b\,(\vec{q}-\vec{r})\cdot\vec{r}\\ &= 1-a+b\left(\frac{1}{2}-1\right)\\ &= 1-a-\frac{1}{2}b.\end{aligned}$$

より $\mathbf{2}a+b=\mathbf{2}$.

$b=\dfrac{1}{2}$ のとき $a=\dfrac{1}{2}(2-b)=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$. $\overrightarrow{EK}=c\overrightarrow{EC}$ と表すと $\overrightarrow{EK}=c\,(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})$. よって

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=c\,\vec{p}+c\,\vec{q}+(1-c)\vec{r}.$$

一方、点 K は平面 α 上にあるから、$\overrightarrow{AK}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AX}+s\overrightarrow{XY}+t\overrightarrow{XZ}\\ &= a\,\vec{p}+s\ \{(1-a)\vec{p}+b\,\vec{r}\}+t\ (\vec{q}+\vec{r})\\ &= \frac{3}{4}\vec{p}+s\ \left\{\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right\}+t\ (\vec{q}+\vec{r})\\ &= \left(\frac{1}{\mathbf{4}}s+\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{p}+t\overrightarrow{q}+\left(\frac{1}{\mathbf{2}}s+t\right)\overrightarrow{r}\end{aligned}$$

４点 A, B, D, E が同一平面上にないため、$\overrightarrow{AK}$ に対する上の二つの式で $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ の各係数は等しい。よって

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{4}s+\frac{3}{4} &= c\\ t &= c\\ \frac{1}{2}s+t &= 1-c\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}c &= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\\ s &= -\frac{1}{2}\\ t &= \frac{5}{8}\end{aligned}\right.$$

つまり $\overrightarrow{EK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{EC}$.

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{EC}|^2 &= \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EC} \\
&= (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) \cdot (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) \\
&= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{r} + |\vec{r}|^2 \\
&= 1 + 1 - 2 \times \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

となるため、$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{2}$. 以上より $|\overrightarrow{EK}| = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$