

数学 2 B

第 6 問

自然数 N を三つの自然数 a, b, c の和として表す方法の総数を求める。ただし a, b, c は $a \leq b \leq c$ を満たすとする。

次のように考えよう。まず、 a のとり得る値の範囲を求め、次に、その範囲にある a の各値について、 $a + b + c = N$ となる自然数 b, c ($a \leq b \leq c$) の組を数える。

(1) $a \leq b \leq c$ より、 a のとり得る値は $\frac{N}{3}$ 以下のすべての自然数である。

(2) $N = 20$ とする。このとき a のとり得る最大の数はいくつであり、さらに、 $a = 3$ のとき、 b, c ($3 \leq b \leq c$) の組は全部でいくつ個である。

$a \leq b, a \leq c$ であることから $a + b + c \geq a + a + a = 3a$. よって $a + b + c = N$ であるとき $3a \leq N$. つまり、 a のとり得る値は $\frac{N}{3}$ 以下のすべての自然数である。

$N = 20$ のとき $a \leq \frac{20}{3}$ であるため、 a のとり得る最大の数はいくつである。 $a = 3$ のとき、 b, c は

$$3 \leq b \leq c, b + c = 20 - 3 = 17$$

を満たすため、

$$(b, c) = (4, 13), (5, 12), (6, 11), (7, 10), (8, 9)$$

以上が条件を満たす b, c の組である。よって b, c の組は全部で 5 個である。

(3) 自然数 N を三つの自然数 a, b, c ($a \leq b \leq c$) の和として表す方法の総数を求めるため、以下のような (プログラム) を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

(プログラム)

```
100 INPUT N
110 LET X=0
120 FOR A=1 TO INT(N/(ア))
130   LET (エ)
140 NEXT A
150 PRINT "N=";N;" のとき、総数は ";X;" 通りである"
160 END
```

(エ) に当てはまるものを次の 0 . ~ 5 . の中から一つ選べ。

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 0 . $X=X+1$ | 1 . $X=X+\text{INT}(A/2)-1$ |
| 2 . $X=X+A+3$ | 3 . $X=X+2*\text{INT}(A/2)+3$ |
| 4 . $X=X+\text{INT}((N-A)/2)-2$ | 5 . $X=X+\text{INT}((N-A)/2)-A+1$ |

(プログラム) を実行して、 N に 13 を入力したとき、130 行は (オ) 回実行され、150 行で出力される X の値は (カキ) である。

(プログラム) の内容は以下の通りである。

```
100 自然数 N を入力
110 条件を満たす A, B, C の数を X とする。まだ組数は分からないため X=0 とする。
120 A を 1 から順に (1) で求めた最大値 INT(N/3) まで動かす。
130   A を一つ決めるとき
```

$$A \leq B \leq C, B+C = N-A$$

を満たす (B, C) の組数を X に加える。

```
140 A を次の数にする。130 行の操作を繰り返す。
150 X の値を出力する。
160 終了
```

つまり (エ) は 130 行の条件式の組数加える操作になる。 $B \leq C, B+C = N-A$ を満たす (B, C) の組の個数は $\text{INT}((N-A)/2)$ と表すことができる。

しかし、 $B \leq A-1$ であるものは当てはまらないため、個数は $\text{INT}((N-A)/2)-(A-1) = \text{INT}((N-A)/2)-A+1$ となる。よって (エ) に当てはまるものは 5 . の $X=X+\text{INT}((N-A)/2)-A+1$

(プログラム) を実行させると、130 行の実行回数のはとり得る範囲の自然数の個数と等しいため、 N に 13 を入力したとき、130 行は $\text{INT}(13/3) = 4$ 回実行される。また X の値は

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{A=1}^4 (\text{INT}((13-A)/2)-A+1) \\
 &= \text{INT}\left(\frac{12}{2}\right) + \left(\text{INT}\left(\frac{11}{2}\right) - 1\right) + \left(\text{INT}\left(\frac{10}{2}\right) - 2\right) + \left(\text{INT}\left(\frac{9}{2}\right) - 3\right) \\
 &= 6 + (5-1) + (5-2) + (4-3) \\
 &= 14.
 \end{aligned}$$

(4) 一般に、三つの正の数について、どの二つの数の和も残りの数より大きければ、それらを三辺の長さとする三角形が存在する。逆に、すべての三角形において、どの二辺の長さの和も残りの一辺の長さより大きい。

この事実を用いて、自然数 N を三角形の三辺の長さとなり得る三つの自然数 a, b, c ($a \leq b \leq c$) の和として表す方法をすべて列挙し、その総数を求める。そのためには (3) の (プログラム) の 130 行を削除して、次の 131 行 ~ 137 行を追加すればよい。

```

131 FOR B= (ク)
132     LET C= (ケ)
133     IF (コ) THEN
134         PRINT "(";A;"",B;"",C;")"
135     LET (サ)
136     END IF
137 NEXT B

```

(ク) に当てはまるものを、次の 0 . ~ 5 . の中から一つ選べ。

0 . 1 TO INT(N/2)	1 . 1 TO INT((N-A)/2)
2 . A TO N	3 . A TO N-1
4 . A TO INT((N-A)/2)	5 . A TO INT((N-A)/2)+1

(ケ) に当てはまるものを、次の 0 . ~ 5 . の中から一つ選べ。

0 . B	1 . B+A	2 . B-A
3 . N-B	4 . N-A-B	5 . N+A-B

(コ) に当てはまるものを、次の 0 . ~ 5 . の中から一つ選べ。

0 . A<B+C	1 . B<A+C	2 . C<A+B
3 . A<B+C+1	4 . B<A+C+1	5 . C<A+B+1

(サ) に当てはまるものを、次の 0 . ~ 5 . の中から一つ選べ。

0 . X=X+INT(N/2)	1 . X=X+INT(N/3)	2 . X=X+INT(N/2)+1
3 . X=X+A-1	4 . X=X+A	5 . X=X+1

変更後のプログラムを実行して、 N に 13 を入力したとき、150 行で出力される X の値は (シ) である。

131 行 ~ 137 行のプログラムの内容は以下の通り

(130 行までで N, A を一つずつ決めている。)
 131 B を A から条件を満たす範囲まで動かす。
 132 $C = N-A-B$ とする。
 133 A, B, C を三辺の長さとする三角形が存在するか判断する。
 134 三角形が存在するとき、 (A, B, C) を表示する。
 135 X を一つ増やす。
 136 三角形が存在するときの操作を終える。
 137 B を一つ増やす。

B は $B \leq C$, $B+C = N-A$ を満たすため、B のとり得る最大値は $\text{INT}((N-A)/2)$ となる。つまり (ク) に当てはまるのは 4 . の A TO $\text{INT}((N-A)/2)$.

132 行の内容から (ケ) に当てはまるのは 4 . の $N-A-B$.

A, B, C を三辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は

$$A < B+C, \quad B < A+C, \quad C < A+B$$

が成り立つことである。 $A < B < C$ の条件から 1 番目、2 番目の条件は成り立つ。よって 3 番目の条件が成り立つことを判断しなければいけない。以上より (コ) に当てはまるものは 2 . の $C < A+B$

135 行の内容から (サ) に当てはまるのは 5 . の $X=X+1$.

以上の操作を元に N に 13 を入力したときの出力される (A, B, C) の組は以下ようになる。

$$(A, B, C) = (1, 6, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 5), (4, 4, 5)$$

よって X の値は 5.