数学１

第１問

［1］$a=3+2\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \textbf{(ア)}-\textbf{(イ)}\sqrt{\textbf{(ウ)}}\\ \frac{1}{b} &= \textbf{(エ)}-\sqrt{\textbf{(オ)}}\\ \frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= \textbf{(カ)}\sqrt{\textbf{(キ)}}-\textbf{(ク)}\sqrt{\textbf{(ケ)}}\end{aligned}$$

である。このとき、不等式

$$|2abx-a^2|<b^2$$

をみたす x の値の範囲は

$$\textbf{(コ)}\sqrt{\textbf{(サ)}}-\textbf{(シ)}\sqrt{\textbf{(ス)}}<x<\textbf{(セ)}-\textbf{(ソ)}\sqrt{\textbf{(タ)}}$$

となる。

$a=3+2\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\mathbf{3-2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$$

このことを利用すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= a\times\frac{1}{b}-b\times\frac{1}{a}\\ &= (3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})\\ &= (6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6})-(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})\\ &= \mathbf{8\sqrt{2}-6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

　不等式 $|2abx-a^2|<b^2$ について

$$\begin{aligned}|2abx-a^2|<b^2 &\Leftrightarrow -b^2<2abx-a^2<b^2\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2<2abx<a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{2ab}<x<\frac{a^2+b^2}{2ab}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\frac{a^2-b^2}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(8\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(12-4\sqrt{6}\right)=6-2\sqrt{6}$$

であることから、求める範囲は $\boldsymbol{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}} < x < \boldsymbol{6-2\sqrt{6}}$ である。

［２］n を自然数とし、

$$A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2$$

とおく。

$$n^4 + 3n^2 + 2 = \left(n^2 + \textbf{(チ)}\right)\left(n^2 + \textbf{(ツ)}\right)$$

であるから

$$A = \left(n^2 + \textbf{(テ)}\right)\left(n^2 - \textbf{(ト)}n + \textbf{(ナ)}\right)$$

となる。ただし (チ) と (ツ) の解答の順序は問わない。

さらに

$$n^2 - (\text{ト})n + (\text{ナ}) = (n - \textbf{(ニ)})^2 + \textbf{(ヌ)}$$

である。

したがって、$A < 1000$ を満たす最大の n は **(ネ)** であり、このときの A の素因数分解は

$$A = \textbf{(ノ)} \times \textbf{(ハヒ)} \times \textbf{(フヘ)}$$

となる。ただし、(ハヒ) と (フヘ) の解答の順序は問わない。

$n^4 + 3n^2 + 2$ について $X = n^2$ とおくと

$$\begin{aligned} n^4 + 3n^2 + 2 &= X^2 + 3X + 2 \\ &= (X+1)(X+2) \\ &= (n^2 + \mathbf{1})(n^2 + \mathbf{2}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A &= (n^4 + 3n^2 + 2) - (2n^3 + 2n) \\ &= (n^2+1)(n^2+2) - 2n(n^2+1) \\ &= (n^2 + \mathbf{1})(n^2 - \mathbf{2}n + \mathbf{2}) \end{aligned}$$

さらに

$$n^2 - 2n + 2 = (n - \mathbf{1})^2 + \mathbf{1}$$

である。このことから n が増加すると A も増加することがわかる。

$n = 7$ のとき、$(n-1)^2 + 1 = 6^2 + 1 = 37 < n^2 + 1$ より $A > 37^2 > 1000.$
$n = 6$ のとき、$A = (6^2+1)(5^2+1) = 962 < 1000.$

以上より $A < 1000$ を満たす最大の n は $\mathbf{6}$ であり、上の式から、このときの A の素因数分解は

$$A = 37 \times 26 = \mathbf{2} \times \mathbf{13} \times \mathbf{37}$$

となる。