

数学 1

第 2 問

a, b, c を定数とし、 $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots \cdots (I)$$

のグラフを G とする。 G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸を持つとき

$$a = \frac{(\text{アイ})}{(\text{ウ})} \quad \cdots \cdots (II)$$

となる。さらに、 G が点 $(1, 2b - 1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{(\text{エ})}{(\text{オ})} \quad \cdots \cdots (III)$$

が成り立つ。

以下、(II), (III) のとき、2 次関数 (I) とそのグラフ G を考える。

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{(\text{カキ})(\text{ケ})}{(\text{ク})(\text{コ})} < b$$

である。さらに、 G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{(\text{サ})}{(\text{シ})} < b < \frac{(\text{ス})}{(\text{セ})}$$

である。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leq x \leq b$ における 2 次関数 (I) の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき $b = \frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})}$ である。一方、 $x \geq b$

における 2 次関数 (I) の最大値が 3 であるとき $b = \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})}$ である。

$b = \frac{(\text{ソ})}{(\text{タ})}, b = \frac{(\text{チ})}{(\text{ツ})}$ のときの (I) のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。 G_1 を x 軸方向に (テ)、 y 軸方向に (ト) だけ平行移動すれば、 G_2 と一致する。

グラフ G について

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

より G の軸の式は $x = -\frac{b}{2a}$ である。一方 $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフについても

$$y = -3(x - 2b)^2 + 12b^2$$

より、このグラフの軸の式は $x = 2b$ である。

2つのグラフが同じ軸を持つため、 $-\frac{b}{2a} = 2b \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$ となる。 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $(1, 2b - 1)$ を通るとき $2b - 1 = a + b + c$ が成り立つ。この式に先ほどの $a = -\frac{1}{4}$ を代入すると

$$2b - 1 = -\frac{1}{4} + b + c \Rightarrow c = b - \frac{3}{4}$$

が成り立つ。以上より (I) の式は

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4}$$

となる。

(1) G と x 軸が異なる2点で交わるとき、 x に関する2次方程式

$$-\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4} = 0$$

は異なる2つの実数解を持つ。このことは、この2次方程式の判別式が正であることと同値である。判別式は

$$b^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(b - \frac{3}{4}\right) = b^2 + b - \frac{3}{4}$$

であるため、 G と x 軸が異なる2点で交わるとき b は $b^2 + b - \frac{3}{4} > 0$ の条件を満たす。

$$b^2 + b - \frac{3}{4} = \left(b + \frac{3}{2}\right) \left(b - \frac{1}{2}\right)$$

であることから、求める b の範囲は $b < -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} < b$ となる。

さらに G と x 軸の正の部分が異なる2点で交わるとき、 x^2 の係数が負であるため以下の3つの条件が成り立たなければならない。

- G が x 軸と異なる2点で交わる。
- 2次関数が $x = 0$ で負の値をとる。
- グラフ G の軸が x 軸の正の部分で交わる。

各条件を満たす b の範囲を求めると以下の通りになる。

$$G \text{ が } x \text{ 軸と異なる2点で交わる。} \quad \Leftrightarrow \quad b < -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} < b$$

$$2 \text{ 次関数が } x = 0 \text{ で負の値をとる。} \quad \Leftrightarrow \quad b - \frac{3}{4} < 0 \Leftrightarrow b < \frac{3}{4}$$

$$\text{グラフ } G \text{ の軸が } x \text{ 軸の正の部分で交わる。} \quad \Leftrightarrow \quad 2b > 0 \Leftrightarrow b > 0$$

以上の3つの条件を満たす b の範囲は $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ である。

(2) $b > 0$ とする。このときグラフ G の軸は x 軸の正の部分と交わる。さらに x^2 の係数が負であるため、2 次関数 (I) は $0 \leq x \leq 2b$ の範囲では増加、 $x \geq 2b$ の範囲では減少する。

よって $0 \leq x \leq b$ における 2 次関数 (I) の最小値は $x = 0$ のときの値になる。この最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき

$$b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

である。一方 $x \geq b$ における 2 次関数 (I) の最大値は $x = 2b$ のときの値

$$-\frac{1}{4} \times (2b)^2 + b \times 2b + b - \frac{3}{4} = b^2 + b - \frac{3}{4}$$

になる。この最大値が 3 であるとき

$$b^2 + b - \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow \left(b + \frac{5}{2}\right) \left(b - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$$

となる。いま $b > 0$ という条件があるため、求める b の値は $b = \frac{3}{2}$ である。

$b = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ のときの (I) のグラフをそれぞれ G_1 , G_2 とすると、 G_1 , G_2 の頂点の座標はそれぞれ $(1, 0)$, $(3, 3)$ である。

このことから G_1 を x 軸方向に 2、 G_2 を y 軸方向に 3 だけ平行移動すれば、 G_2 と一致する。