数学１

第２問

a, b は正の実数で、$\dfrac{a}{b}$ は整数でないとする。$\dfrac{a}{b}$ をこえない最大の整数を m、$\dfrac{b}{a-bm}$ をこえない最大の整数を n とする。すなわち m, n は

$$m < \frac{a}{b} < m+1, \quad n \leq \frac{b}{a-bm} < n+1$$

を満たす整数である。

(1) $a = 17,\, b = 3$ のとき $m = $ **(ア)**, $n = $ **(イ)** である。

(2) $a = 20,\, b = \sqrt{2}$ のとき $m = $ **(ウエ)**, $n = $ **(オ)** である。

(3) $\dfrac{9}{4} < \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{7}{3}$ であるとき $m = $ **(カ)** であるから、$\dfrac{a}{b} - m$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\textbf{(キ)}}{\textbf{(ク)}} < \frac{a}{b} - m \leq \frac{\textbf{(ケ)}}{\textbf{(コ)}}$$

となる。よって $\dfrac{b}{a-bm}$ のとり得る値の範囲は

$$\textbf{(サ)} \leq \frac{b}{a-bm} < \textbf{(シ)}$$

となり、$n = $ **(ス)** と定まる。

(4) $m = n = 2$ となるときの $\dfrac{a}{b}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\textbf{(セ)}}{\textbf{(ソ)}} < \frac{a}{b} \leq \frac{\textbf{(タ)}}{\textbf{(チ)}}$$

である。

---

(1) $a = 17,\, b = 3$ のとき $5 = \dfrac{15}{3} < \dfrac{17}{3} < \dfrac{18}{3} = 6$ より $m = \mathbf{5}$ また、$1 < \dfrac{3}{17 - 3 \times 5} = \dfrac{3}{2} < 2$ より $n = \mathbf{1}$ である。

(2) $a = 20,\, b = \sqrt{2}$ のとき $14 = \sqrt{196} < \dfrac{20}{\sqrt{2}} = \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$ より $m = \mathbf{14}$ また、$\dfrac{\sqrt{2}}{20 - 14\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}+7}{2}$ について

$$\begin{aligned} \frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10} \quad &\Rightarrow \quad 14 < 5\sqrt{2} + 7 < \frac{29}{2} \\ &\Rightarrow \quad 7 < \frac{5\sqrt{2}+7}{2} < \frac{29}{4} < 8 \end{aligned}$$

より $n = \mathbf{7}$ である。

(3) $\dfrac{9}{4} < \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{7}{3}$ であるとき $2 < \dfrac{9}{4}$, $\dfrac{7}{3} < 3$ より $m = \mathbf{2}$ であるから、

$$\frac{9}{4} - 2 = \mathbf{\frac{1}{4}} < \frac{a}{b} - 2 \leq \frac{7}{3} - 2 = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

ここで

$$\frac{b}{a - bm} = \frac{1}{\dfrac{a}{b} - 2}$$

より

$$\mathbf{3} \leq \frac{b}{a - bm} < \mathbf{4}$$

よって $n = \mathbf{3}$ である。

(4) $m = n = 2$ であるとき、

$$2 \leq \frac{a}{b} < 3 \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(I)}$$
$$2 \leq \frac{b}{a - 2b} < 3 \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(II)}$$

の両式を満たす。(II) より

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} - 2 \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{7}{3}} < \frac{a}{b} \leq \mathbf{\frac{5}{2}}$$

この $\dfrac{a}{b}$ の範囲は (I) の条件も満たしているため、上の範囲が求める範囲になる。