数学１A

第１問

［1］$a=3+2\sqrt{2},\ b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \textbf{(ア)}-\textbf{(イ)}\sqrt{\textbf{(ウ)}}\\ \frac{1}{b} &= \textbf{(エ)}-\sqrt{\textbf{(オ)}}\\ \frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= \textbf{(カ)}\sqrt{\textbf{(キ)}}-\textbf{(ク)}\sqrt{\textbf{(ケ)}}\end{aligned}$$

である。このとき、不等式

$$|2abx-a^2|<b^2$$

をみたす x の値の範囲は

$$\textbf{(コ)}\sqrt{\textbf{(サ)}}-\textbf{(シ)}\sqrt{\textbf{(ス)}}<x<\textbf{(セ)}-\textbf{(ソ)}\sqrt{\textbf{(タ)}}$$

となる。

$a=3+2\sqrt{2},\ b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\mathbf{3-2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$$

このことを利用すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= a\times\frac{1}{b}-b\times\frac{1}{a}\\ &= (3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})\\ &= (6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6})-(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})\\ &= \mathbf{8\sqrt{2}-6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

不等式 $|2abx-a^2|<b^2$ について

$$\begin{aligned}|2abx-a^2|<b^2 &\Leftrightarrow -b^2<2abx-a^2<b^2\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2<2abx<a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{2ab}<x<\frac{a^2+b^2}{2ab}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\frac{a^2-b^2}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(8\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(12-4\sqrt{6}\right) = 6-2\sqrt{6}$$

であることから、求める範囲は $\mathbf{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}} < x < \mathbf{6-2\sqrt{6}}$ である。

［２］実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める。

$p : (a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$
$q : |a+b| < 1$ または $|a-2b| < 2$

(1) 次の ０．～３．のうち、命題「$q \Rightarrow p$」に対する反例になっているのは **(チ)** である。

０． $a=0,\ b=0$　　１． $a=1,\ b=0$
２． $a=0,\ b=1$　　３． $a=1,\ b=1$

(2) 命題「$p \Rightarrow q$」 の対偶は 「**(ツ)** $\Rightarrow$ **(テ)**」 である。**(ツ)**、**(テ)** に当てはまるものを次の ０．～７． のうちから一つずつ選べ。

０． $|a+b| < 1$ かつ $|a-2b| < 2$　　１． $(a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$
２． $|a+b| < 1$ または $|a-2b| < 2$　　３． $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \leq 5$
４． $|a+b| \geq 1$ かつ $|a-2b| \geq 2$　　５． $(a+b)^2 + (a-2b)^2 > 5$
６． $|a+b| \geq 1$ または $|a-2b| \geq 2$　　７． $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5$

(3) p は q であるための **(ト)**。
(ト) に当てはまるものを次の ０．～３． のうちから一つずつ選べ。

０．必要十分条件である
１．必要条件であるが、十分条件でない
２．十分条件であるが、必要条件でない
３．必要条件でも十分条件でもない

---

(1) 命題「$q \Rightarrow p$」に対する反例とは、q が成立するが、p が成立しない例のことである。０．～３．の選択肢の値に対して q, p が成立するか調べると以下の通りになる。

a, b	q	p
０．$a=0,\ b=0$	成立する	成立する
１．$a=1,\ b=0$	成立する	成立する
２．$a=0,\ b=1$	成立しない	成立しない
３．$a=1,\ b=1$	成立する	成立しない

以上より 「$q \Rightarrow p$」 に対する反例になるのは **３．** $a=1,\ b=1$ である。

(2) $p \Rightarrow q$ の対偶は $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ である (ここで $\overline{p}$ は命題 p の否定)
$\overline{q}$ にあたる命題は $|a+b| \geq 1$ かつ $|a-2b| \geq 2.$
$\overline{p}$ にあたる命題は $(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5.$
である。よって **(ツ)**、**(テ)** に当てはまるものはそれぞれ **４．**, **７．** である。

(3) p が q であるための十分条件であることを証明するためには $p \Rightarrow q$ を証明すればよい。
実数 a, b について

$$\begin{aligned} \overline{q}\text{ が成立} &\Rightarrow |a+b| \geq 1 \text{ かつ } |a-2b| \geq 2 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a+b)^2 &=& |a+b|^2 \geq 1 \\ (a-2b)^2 &=& |a-2b|^2 \geq 4 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow (a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 1+4 = 5 \\ &\Rightarrow \overline{p}\text{ が成立} \end{aligned}$$

このことから $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が証明されたため、この命題の対偶である $p \Rightarrow q$ も成り立つことがわかる。以上より p が q であるための十分条件である。

p が q であるための必要条件であることを証明するためには $q \Rightarrow p$ を証明すればよいが、(1) で反例が出てきているため、 p が q であるための必要条件でないことがわかる。

以上より p は q であるための十分条件であるが、必要条件でない (選択肢の **2．**) ことがわかる。