

数学 1 A

第 4 問

1 個のさいころを投げるとき、4 以下の目が出る確率 p は $\frac{(\text{ア})}{(\text{イ})}$ であり、5 以上の目が出る確率 q は $\frac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$ である。

以下では、1 個のさいころを 8 回繰り返して投げる。

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は (オカ) $p^3 q^5$ である。

第 1 回目に 4 以下の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は (キク) $p^3 q^5$ である。

第 1 回目に 5 以上の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は (ケコ) $p^3 q^5$ である。

(2) 次の 0 . ~ 7 . のうち (オカ) に等しいものは (サ) と (シ) である。ただし、(サ) と (シ) は解答の順序を問わない。

$$\begin{array}{llll} 0 . & {}_7C_2 \times {}_7C_3 & 1 . & {}_8C_1 \times {}_8C_2 \\ 4 . & {}_7C_4 \times {}_7C_5 & 5 . & {}_8C_6 \times {}_8C_7 \\ 2 . & {}_7C_2 + {}_7C_3 & 6 . & {}_7C_4 + {}_7C_5 \\ 3 . & {}_8C_1 + {}_8C_2 & 7 . & {}_8C_6 + {}_8C_7 \end{array}$$

(3) 得点を次のように定める。

8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出た場合、

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について、第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき、得点は n 点とする。

また、4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とならないときは、得点を 0 点とする。

このとき、得点が 6 点となる確率は $p^{(\text{ス})} q^{(\text{セ})}$ であり、得点が 3 点となる確率は (ソタ) $p^{(\text{ス})} q^{(\text{セ})}$ である。また、得点の期待値は $\frac{(\text{チツテ})}{(\text{トナニ})}$ である。

さいころの目のうち 4 以下の目は 1 ~ 4、5 以上の目は 5、6 であるため 4 以下の目が出る確率 p は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ であり、5 以上の目が出る確率 q は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は

$${}_8C_3 p^3 q^5 = 56 p^3 q^5.$$

第 1 回目に 4 以下の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は

$$p \times {}_7C_2 p^2 q^5 = 21 p^3 q^5.$$

第 1 回目に 5 以上の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は

$$q \times {}_8C_3 p^3 q^4 = 35 p^3 q^5.$$

上の結果から ${}_8C_3 = {}_7C_2 + {}_7C_3$ が成り立つ。また一般に $n \geq m \geq 0$ である自然数 n, m に対して ${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$ が成り立つため、 ${}_8C_3 = {}_7C_5 + {}_7C_4$ が成り立つ。以上より (サ), (シ) に当てはまる選択肢は 2 . , 6 . である。

(2) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出た場合、

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について、第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき、得点は n 点とする。

また、4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とならないときは、得点を 0 点とする。

得点が 6 点となるとき、はじめの 5 回はすべて 5 以上の目が出て、残りの 3 回はすべて 4 以下の目が出ている。よってその確率は $q^5 \times p^3 = p^3 q^5$ 。

得点が 3 点となるとき、はじめの 2 回はすべて 5 以上の目、3 回目に 4 以下の目が出て、残りの 5 回の中でちょうど 2 回 4 以下の目が出ている。よってその確率は

$$q^2 \times p \times {}_5C_2 p^2 q^3 = 10 p^3 q^5.$$

ほかの得点についても同様の計算を行うと確率は以下の通りになる。

1 点	$p \times {}_7C_2 p^2 q^5 = 21 p^3 q^5$
2 点	$q \times p \times {}_6C_2 p^2 q^4 = 15 p^3 q^5$
3 点	$q^2 \times p \times {}_5C_2 p^2 q^3 = 10 p^3 q^5$
4 点	$q^3 \times p \times {}_4C_2 p^2 q^2 = 6 p^3 q^5$
5 点	$q^4 \times p \times {}_3C_2 p^2 q = 3 p^3 q^5$
6 点	$p^3 q^5$

以上より得点の期待値は

$$\begin{aligned}
 (1 \times 21 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 6 + 5 \times 3 + 6 \times 1) \times p^3 q^5 &= 126 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\
 &= \frac{112}{729}.
 \end{aligned}$$