数学 2

第 2 問

座標平面上で、放物線 $y = x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における接線 ℓ の方程式は

$$y = (\text{アイ})x - a(\text{ウ})$$

である。 $a \neq 0$ のとき直線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とすると、 Q の座標は

$$\left(\frac{(\text{エ})}{(\text{オ})}, (\text{カ}) \right)$$

である。

$a > 0$ のとき、曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{a(\text{キ})}{(\text{クケ})}$$

である。

$a < 2$ のとき、曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = -\frac{a^3}{(\text{コ})} + (\text{サ})a^2 - (\text{シ})a + \frac{(\text{ス})}{(\text{セ})}$$

である。

$a = 0$ のときは $S = 0$ 、 $a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして、 $0 \leq a \leq 2$ に対して $U = S + T$ とおく。 a がこの範囲を動くとき、 U は $a = (\text{ソ})$ で最大値 $\frac{(\text{タ})}{(\text{チ})}$ をとり、 $a = \frac{(\text{ツ})}{(\text{テ})}$ で最小値 $\frac{(\text{ト})}{(\text{ナニ})}$ をとる。

C 上の点 P の x 座標が a のとき、点 P の座標は (a, a^2) 。

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$ より点 P における接線 ℓ の傾きは $2a$ である。

以上より、接線 ℓ の方程式は

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

$a \neq 0$ のとき、直線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とする。点 Q の y 座標は 0 であるため、

$$2ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

よって Q の座標は

$$\left(\frac{a}{2}, 0 \right)$$

である。

$a > 0$ のとき、曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx - \int_{a/2}^a (2ax - a^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a - [ax^2 - a^2x]_{a/2}^a \\ &= \frac{a^3}{3} - \left\{ 0 - \left(\frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{a^3}{12}. \end{aligned}$$

$a < 2$ のとき、曲線 C と直線 l および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 x^2 dx - \int_a^2 (2ax - a^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^2 - [ax^2 - a^2x]_a^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{a^3}{3} \right) - \{ 4a - 2a^2 \} \\ &= -\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$a = 0$ のときは $S = 0$ 、 $a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして、 $0 \leq a \leq 2$ に対して $U = S + T$ とおく。このとき $0 < a < 2$ では

$$U = \frac{a^3}{12} + \left(-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \right) = -\frac{a^3}{4} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}.$$

が成り立つ。また、 $a = 0$ では $\frac{a^3}{12} = 0$ 、 $a = 2$ では $-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} = 0$ が成り立つため、 $0 \leq a \leq 2$ に対して U は上の式で表すことができる。この関数を a で微分すると

$$\frac{dU}{da} = -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 = -\frac{1}{4}(3a - 4)(a - 4)$$

となるため、

$$\frac{dU}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}, 4$$

$0 \leq a \leq 2$ の範囲で U の増減表は以下の通りになる。($a = 4$ は範囲外になる。)

a	0		4/3		2
$\frac{dU}{da}$		-	0	+	
U	$\frac{8}{3}$	減少	$\frac{8}{27}$	増加	$\frac{4}{3}$

表より、 U は $a = 0$ で最大値 $\frac{8}{3}$ 、 $a = \frac{4}{3}$ で最小値 $\frac{8}{27}$ をとる。