

数学 2

第 3 問

O を原点とする座標平面上に正六角形 $OABCDE$ がある。ただし、頂点は時計の針の回転と逆の向きに O, A, B, C, D, E の順に並んでいるものとする。また、直線 OA の方程式は $y = 3x$ 、直線 BE の方程式は $y = 3x + 2$ であるとする。点 A, D の座標と正六角形 $OABCDE$ の外接円の方程式を求めよう。

原点を通り、直線 OA に垂直な直線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{(\text{ア})}x$$

であり、直線 CD の方程式は $y = (\text{イ})x + (\text{ウ})$ である。 D は ℓ と直線 CD の交点であるから、 D の座標は

$$\left(-\frac{(\text{エ})}{(\text{オ})}, \frac{(\text{カ})}{(\text{オ})}\right)$$

である。

また $OA : OD = 1 : \sqrt{(\text{キ})}$ であるから $OA = \frac{2\sqrt{(\text{クケ})}}{(\text{コサ})}$ であり、 A の座標は

$$\left(\frac{2\sqrt{(\text{シ})}}{(\text{スセ})}, \frac{2\sqrt{(\text{シ})}}{(\text{ソ})}\right)$$

となる。外接円の中心は線分 AD の中点で、その半径は正六角形 $OABCDE$ の一辺の長さに等しいから、外接円の方程式は

$$\left(x + \frac{(\text{タ}) - \sqrt{(\text{シ})}}{(\text{スセ})}\right)^2 + \left(y - \frac{(\text{チ}) + \sqrt{(\text{シ})}}{(\text{ソ})}\right)^2 = \frac{(\text{ツ})}{(\text{テト})}$$

である。

直線 OA に垂直な直線 ℓ の傾きは $-\frac{1}{3}$ であり原点を通るため、直線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{3}x$$

直線 OA と直線 CD は直線 BE に関して対称である。直線 BE 、直線 CD の y 軸との交点をそれぞれ O_1, O_2 とおくと $OO_1 = O_1O_2$ が成り立つ。 $O_1 = (0, 2)$ であるため、 $O_2 = (0, 4)$ 。よって直線 CD の方程式は $y = 3x + 4$ である。 D は ℓ と直線 CD の交点であるから、 D の x 座標は

$$3x + 4 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$$

となるため、 D の座標は

$$\left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

である。

2点 A, D は正六角形 $OABCDE$ の中心に関して対称な位置にあるため、 $AD = 2OA$. また三角形 OAD は $\angle AOD$ を直角とする直角三角形であるため、 $OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = OA\sqrt{3}$. よって $OA : OD = 1 : \sqrt{3}$. 線分 OD の長さを求めると

$$OD^2 = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} \Rightarrow OD = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

以上から OA の長さを求めると

$$OA = \frac{OD}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

点 A の座標を $(t, 3t)$ とすると、直線 OA と直線 BE の位置関係から $t > 0$ となる。よって

$$t^2 + (3t)^2 = OA^2 = \frac{8}{15} \Rightarrow t = \frac{2}{15}\sqrt{3}.$$

以上より点 A の座標は

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{15}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$$

である。

正六角形 $OABCDE$ の外接円の中心は線分の中点

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{6}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{15}, \frac{2}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \left(\frac{-9 + \sqrt{3}}{15}, \frac{1 + \sqrt{3}}{5}\right)$$

であり、半径は正六角形 $OABCDE$ の一辺の長さ、つまり辺 OA の長さに等しい。以上より外接円の方程式は

$$\left(x + \frac{9 - \sqrt{3}}{15}\right)^2 + \left(y - \frac{1 + \sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{8}{15}$$

である。