数学 2

第 4 問

　$a, b$ は実数で、$P(x)$ と $Q(x)$ はそれぞれ 2 次と 3 次の整式であるとする。$Q(x)$ は $P(x)$ で割り切れて、商が $x+a$ であるとする。このとき

$$Q(x) = (x + \textbf{(ア)})\, P(x)$$

が成り立つ。さらに、$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った時、商が $x+b$、余りが $P(x)$ であるとする。このとき

$$\{P(x)\}^2 = (x + \textbf{(イ)})\, Q(x) + P(x)$$

が成り立つ。上の二つの等式から

$$\{P(x)\}^2 = \{(x + (\text{ア}))\,(x + (\text{イ})) + \textbf{(ウ)}\}\, P(x)$$

となる。したがって

$$P(x) = x^2 + (a + \textbf{(エ)})\, x + \textbf{(オ)}b + \textbf{(カ)}$$

である。

　方程式 $Q(x) = 0$ の三つの解を $\alpha, \beta, \gamma$ とする。
$\alpha + \beta + \gamma = -5$ のとき

$$b = \textbf{(キク)}a + \textbf{(ケ)} \quad \cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

であり、このとき $Q(x) = 0$ が虚数解をもつような $a$ のとり得る値の範囲は

$$\textbf{(コ)} < a < \frac{\textbf{(サ)}}{\textbf{(シ)}}$$

である。
　一方 $\alpha\beta\gamma = -6$ のとき

$$b = \frac{-a + \textbf{(ス)}}{a^{\textbf{(セ)}}} \quad \cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

である。
　(I) と (II) がともに成り立つとき

$$\textbf{(ソ)}a^3 - \textbf{(タ)}a^2 - a + \textbf{(チ)} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

であり、(III) を満たす $a$ の値は

$$\textbf{(ツテ)}, \ \frac{\textbf{(ト)}}{\textbf{(ナ)}}, \ \textbf{(ニ)}$$

の三つである。このうち $Q(x) = 0$ が虚数解をもつような $a$ の値は **(ヌ)** 個ある。

---

$Q(x)$ は $P(x)$ で割り切れて、商が $x+a$ であるとする。このとき $Q(x)$ を $P(x)$ で割った余りは 0 であるため、

$$Q(x) = (x + \mathbf{a})P(x)$$

が成り立つ。$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った時、商が $x+b$、余りが $P(x)$ であるとする。先ほどと同様の考え方から

$$\{P(x)\}^2 = (x+\mathbf{b})\,Q(x) + P(x)$$

が成り立つ。この式の $Q(x)$ に $(x+a)P(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\{P(x)\}^2 &= (x+b)\times(x+a)P(x) + P(x) \\ &= \{(x+a)(x+b)+\mathbf{1}\}P(x)\end{aligned}$$

$P(x)$ は 2 次式であるため、上の式の両辺を $P(x)$ で割ると

$$P(x) = (x+a)(x+b)+1 = x^2+(a+\mathbf{b})x+\mathbf{a}b+\mathbf{1}$$

となる。

方程式 $Q(x)=0$ の三つの解を $\alpha, \beta, \gamma$ とする。$Q(x)=(x+a)P(x)$ より三つの解のうち一つは $x=-a$ であり、残り二つの解は方程式 $P(x)=0$ の解、つまり

$$x^2+(a+b)x+ab+1=0$$

の二つの解である。対称性から $\alpha, \beta$ がこの方程式の二つの解で、$\gamma=-a$ として考えてもよい。このとき

$$\alpha+\beta=-(a+b), \quad \alpha\beta=ab+1$$

が成り立つ。

$\alpha+\beta+\gamma=-5$ のとき

$$\{-(a+b)\}+(-a)=-5 \quad\Rightarrow\quad b=-\mathbf{2}a+\mathbf{5} \ \cdots\cdots\cdots(I)$$

が成り立つ。このとき

$$x^2+(a+b)x+ab+1 = x^2+(-a+5)x+(-2a^2+5a+1)$$

となる。

$Q(x)=0$ が虚数解をもつとき $\gamma=-a$ は実数であるため、$\alpha, \beta$ のいずれかが虚数であるが、$\alpha, \beta$ は方程式 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$ の解であるため、共に虚数でなければいけない。つまり方程式 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$ は虚数解をもつ。よって

$$(-a+5)^2-4\times(-2a^2+5a+1) = 9a^2-30a+21<0$$

が成り立つ。$9a^2-30a+21=3(3a-7)(a-1)$ より上の条件を満たす $a$ の範囲は

$$\mathbf{1} < a < \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$$

である。

一方 $\alpha\beta\gamma=-6$ のとき

$$(-a)\times(ab+1)=-6 \ \Rightarrow\ -a^2b=a-6 \ \Rightarrow\ b=\frac{-a+\mathbf{6}}{a^{\mathbf{2}}} \ \cdots\cdots\cdots(II)$$

(I) と (II) がともに成り立つとき

$$\begin{aligned}
-2a+5=\frac{-a+6}{a^2} \quad &\Rightarrow \quad a^2(-2a+5)=-a+6 \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{2}a^3-\mathbf{5}a^2-a+\mathbf{6}=0 \\
&\Rightarrow \quad (a+1)(a-2)(2a-3)=0 \\
&\Rightarrow \quad a=-\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{2}
\end{aligned}$$

この三つの解の中で、$Q(x)=0$ が虚数解をもつときの $a$ の範囲 $1<a<\dfrac{7}{3}$ に含まれるものは $a=\dfrac{3}{2},\ 2$ の **2** 個である。