

数学 2 B

第 1 問

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のとき、関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とおくと

$$t^2 = (\text{ア}) \cos^2 \theta + (\text{イ}) \sqrt{(\text{ウ})} \sin \theta \cos \theta + (\text{エ})$$

であるから

$$y = t^2 - (\text{オ})t - (\text{カ})$$

となる。また

$$t = (\text{キ}) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{(\text{ク})} \right)$$

である。

$\theta + \frac{\pi}{(\text{ク})}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{(\text{ケ})} \leq \theta + \frac{\pi}{(\text{ク})} \leq \frac{\pi}{(\text{ク})}$$

であるから、 t のとり得る値の範囲は

$$(\text{コサ}) \leq t \leq \sqrt{(\text{シ})}$$

である。したがって、 y は $t = (\text{ス})$ 、すなわち $\theta = -\frac{\pi}{(\text{セ})}$ のとき最小値 (ソ) をとる。

$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta \\ &= 1 - \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta \\ &= \mathbf{2} \cos^2 \theta + \mathbf{2\sqrt{3}} \sin \theta \cos \theta + \mathbf{1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= (2 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} (2 \sin \theta \cos \theta) - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1) - 2 (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) - 2 \\ &= t^2 - \mathbf{2}t - \mathbf{2}. \end{aligned}$$

となる。また

$$t = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) = \mathbf{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\mathbf{3}} \right).$$

θ の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ であるため、 $\theta + \frac{\pi}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$$

である。また

$$-\frac{1}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから、 t のとり得る値の範囲は

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3}$$

である。

$y = t^2 - 2t - 2 = (t - 1)^2 - 3$ より、 $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ における関数 y の増減表は以下の通りになる。

t	-1		1		$\sqrt{3}$
y	1	減少	-3	増加	$1 - 2\sqrt{3}$

このことから y は $t = 1$ つまり、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

のときに最小値 -3 をとる。

自然数で、条件

$$12(\log_2 \sqrt{x})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0 \quad \dots\dots\dots \text{(I)}$$

$$x + \log_3 x < 14 \quad \dots\dots\dots \text{(II)}$$

を満たすものを求めよう。

まず、 x を正の実数として、条件 (I) を考える。(I) は $X = \log_2 x$ とおくと

$$6X^2 - (\text{チ})X - (\text{ツテ}) > 0$$

となる。この2次不等式を解くと

$$X < -\frac{(\text{ト})}{(\text{ナ})}, \frac{(\text{ニ})}{(\text{ヌ})} < X$$

となる。したがって、条件 (I) を満たす最小の自然数 x は (ネ) であり、(ネ) 以上のすべての自然数 x は (I) を満たす。

次に、条件 (II) について考えると、(II) を満たす最大の自然数 x は (ノハ) であり、(ノハ) 以下のすべての自然数 x は (II) を満たす。

したがって、求める x は (ネ) 以上 (ノハ) 以下の自然数である。

x を正の実数として、条件 (I) を考える。 $X = \log_2 x$ とおくと

$$\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{1}{2} X, \quad \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2} X$$

であるため、(I) の左辺は

$$12 \times \left(\frac{1}{2}X\right)^2 - 7 \times \left(\frac{1}{2}X\right) - 10 = 3X^2 - \frac{7}{2}X - 10$$

となる。これより (I) は

$$6X^2 - 7X - 20 > 0$$

となる。この式の左辺について

$$6X^2 - 7X - 20 = (3X + 4)(2X - 5)$$

であるため、この2次不等式を解くと

$$X < -\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{2} < X$$

となり、(I) の条件を満たす x の範囲は

$$x < 2^{-\frac{4}{3}} < 1, \quad x > 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$$

であることがわかる。 $5 < 4\sqrt{2} < 6$ より、(I) を満たす最小の自然数 x は 6 であり、6 以上のすべての自然数 x は (I) を満たす。

次に条件 (II) について考える。

$x = 11$ のとき $2 = \log_3 9 < \log_3 11 < 3 = \log_3 27$ より

$$11 + \log_3 11 < 11 + 3 = 14$$

つまり $x = 11$ は条件 (II) を満たす。

$x = 12$ のとき $\log_3 4 > 1$ より $\log_3 12 = \log_3 3 \times 4 = 1 + \log_3 4 > 2$ であるため、

$$12 + \log_3 12 > 12 + 2 = 14$$

つまり $x = 12$ は条件 (II) を満たさない。

$x + \log_3 x$ は増加関数であるため、条件 (II) を満たす最大の自然数 x は 11 であり、11 以下のすべての自然数 x は (II) を満たす。

したがって、求める x は 6 以上 11 以下の自然数である。