数学２B

第３問

数直線上で点 $P$ に実数 $\alpha$ が対応しているとき、$\alpha$ を点 $P$ の座標といい、座標が $\alpha$ である点を $P(\alpha)$ で表す。

数直線上に点 $P_1(1),\ P_2(2)$ をとる。線分 $P_1P_2$ を $3:1$ に内分する点を $P_3$ とする。一般に自然数 $n$ に対して、線分 $P_nP_{n+1}$ を $3:1$ に内分する点を $P_{n+2}$ とする。点 $P_n$ の座標を $x_n$ とする。

$x_1=1, x_2=2$ であり、$x_3=\dfrac{\textbf{(ア)}}{\textbf{(イ)}}$ である。数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるために、この数列の階差数列を考えよう。自然数 $n$ に対して $y_n=x_{n+1}-x_n$ とする。

$$y_1=\textbf{(ウ)},\quad y_{n+1}=\frac{\textbf{(エオ)}}{\textbf{(カ)}}y_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。したがって、$y_n=\dfrac{(エオ)}{(カ)}^{\textbf{(キ)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり

$$y_n=\frac{\textbf{(ク)}}{\textbf{(ケ)}}-\frac{\textbf{(コ)}}{(ケ)}\left(\frac{(エオ)}{(カ)}\right)^{\textbf{(サ)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。ただし、**(キ)**、**(サ)** については、当てはまるものを、次の ０．～３．のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

０．$n-1$　　１．$n$　　２．$n+1$　　３．$n+2$

次に、自然数 $n$ に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_n|$ を求めよう。$r=\left|\dfrac{(エオ)}{(カ)}\right|$ とおくと

$$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{\textbf{(シ)}}r^{k-1}-nr^{\textbf{(ス)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり、したがって

$$S_n=\frac{\textbf{(セソ)}}{\textbf{(タ)}}\left\{1-\left(\frac{1}{\textbf{(チ)}}\right)^{\textbf{(ツ)}}\right\}-\frac{n}{\textbf{(テ)}}\left(\frac{1}{\textbf{(ト)}}\right)^{\textbf{(ナ)}}$$

となる。ただし シ、ス、ツ、ナ については、当てはまるものを、次の ０．～３．のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

０．$n-1$　　１．$n$　　２．$n+1$　　３．$n+2$

一般に $P_n$ と $P_{n+2}$ の間、 $P_{n+1}$ と $P_{n+2}$ の間の距離は $x_{n+2}-x_n$, $x_{n+1}-x_{n+2}$ または $x_n-x_{n+2}$, $x_{n+2}-x_{n+1}$ となる。点 $P_{n+2}$ は線分 $P_nP_{n+1}$ を $3:1$ に内分するため

$$(x_{n+2}-x_n):(x_{n+1}-x_{n+2})=3:1 \quad \Rightarrow \quad 3(x_{n+1}-x_{n+2})=x_{n+2}-x_n$$
$$\Rightarrow \quad x_{n+2}=\frac{1}{4}x_n+\frac{3}{4}x_{n+1}$$

が成り立つ ($(x_n-x_{n+2}):(x_{n+2}-x_{n+1})=3:1$ の場合も同様) このことから

$$x_3=\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times 2=\mathbf{\frac{7}{4}}$$

数列 $\{x_n\}$ の階差数列 $\{y_n\}$ について

$$y_1 = x_2-x_1=\mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+2}-x_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}x_n+\frac{3}{4}x_{n+1}\right)-x_{n+1} \\ &= \frac{1}{4}x_n-\frac{1}{4}x_{n+1} \\ &= -\frac{1}{4}\left(x_{n+1}-x_n\right) \\ &= \mathbf{\frac{-1}{4}}y_n \end{aligned}$$

つまり、数列 $\{y_n\}$ は初項 1 公比 $\dfrac{-1}{4}$ の等比数列になる。したがって $y_n=\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{n-1}$ (**(キ)** に当てはまる選択肢は **0.** ) であり、

$$\begin{aligned} x_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k \\ &= 1+\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \mathbf{\frac{9}{5}}-\mathbf{\frac{4}{5}}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(**(サ)** に当てはまる選択肢は **0.** ) となる。

次に、自然数 $n$ に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_n|$ を求めよう。$r=\left|\dfrac{-1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ とおくと $|y_n|=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となる。

$$\begin{array}{rllllll} S_n= & 1\times r^0+ & 2\times r^1+ & \cdots+ & (n-1)\times r^{n-2}+ & n\times r^{n-1} & \\ -)rS_n= & & 1\times r^1+ & \cdots+ & (n-2)\times r^{n-2}+ & (n-1)\times r^{n-1}+ & n\times r^n \\ \hline S_n-rS_n= & 1\times r^0+ & 1\times r^1+ & \cdots+ & 1\times r^{n-2}+ & 1\times r^{n-1}- & n\times r^{n-1} \end{array}$$

上の式から

$$S_n - rS_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - nr^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(**(シ)** ,**(ス)** に当てはまる選択肢は共に **1.** ) が成り立つ。これより

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

したがって、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{4}{3} \times n\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}}\left\{1-\left(\frac{1}{\mathbf{4}}\right)^n\right\} - \frac{n}{\mathbf{3}}\left(\frac{1}{\mathbf{4}}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(**(ツ)** ,**(ナ)** に当てはまる選択肢はそれぞれ **1.** , **0.** ) となる。