数学２B

第４問

四角錐 $OABCD$ において、三角形 OBC と三角形 OAD は合同で、$OB=1$, $BC=2$, $OC=\sqrt{3}$ であり、底面の四角形 $ABCD$ は長方形である。$AB=2r$ とおき、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{\textbf{(ア)}}-\overrightarrow{\textbf{(イ)}}+\vec{c}$ である。辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\textbf{(ウ)}}{\textbf{(エ)}}\vec{a}-\frac{\textbf{(オ)}}{(エ)}\vec{b}+\frac{\textbf{(カ)}}{(エ)}\vec{c}$$

となる。

さらに辺 OB の中点を M 、3点 A,L,M の定める平面を α とし、平面 α と辺と OC の交点を N とする。点 N は平面 α 上にあることから、$\overrightarrow{AN}$ は実数 s,t を用いて $\overrightarrow{AN}=s\,\overrightarrow{AL}+t\,\overrightarrow{AM}$ と表されるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \left(\textbf{(キ)}-\frac{\textbf{(ク)}}{\textbf{(ケ)}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\textbf{(コ)}}+\frac{t}{\textbf{(サ)}}\right)\vec{b}\\ &\quad +\frac{s}{\textbf{(シ)}}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。一方、点 N は辺 OC 上にもある。これらから、$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\textbf{(ス)}}{\textbf{(セ)}}\vec{c}$ となる。

また、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\textbf{(ソ)}-\textbf{(タ)}r^2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\textbf{(チ)}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\textbf{(ツテ)}r^2$ である。よって、$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}$ を計算すると、$AB=\sqrt{\textbf{(ト)}}$ のとき、直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。四角形 $ABCD$ は長方形であるため、$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ &= \vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}+\vec{c}\end{aligned}$$

辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると $\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{OD}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}\\ &= -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{a}-\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{b}+\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

辺 OB の中点を M 、3点 A,L,M の定める平面を α とし、平面 α と辺と OC の交点を N とする。このとき点 N は $\overrightarrow{AN}=s\,\overrightarrow{AL}+t\,\overrightarrow{AM}$ $(s,t:$ 実数$)$ と表される。また $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

よって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} \\
&= \overrightarrow{OA} + s\ \overrightarrow{AL} + t\ \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{OA} + s\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + t\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}s - t\right)\vec{a} + \left(-\frac{s}{\mathbf{3}} + \frac{t}{\mathbf{2}}\right)\vec{b} + \frac{s}{\mathbf{3}}\vec{c}
\end{aligned}$$

となる。一方、点 N は辺 OC 上にもある。4点 O, A, B, C は同一平面上にないため、上の式の $\vec{a}, \vec{b}$ の係数は 0 に等しい。

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}s - t = 0 \\ -\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{4} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

以上から $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \vec{c}$ となる。

$\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めるために、$\cos\angle AOB, \cos\angle BOC, \cos\angle AOC$ を計算する。三角形 OAB に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2\ OA\cdot OB\cos\angle AOB \\
\Rightarrow\quad \cos\angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2\ OA\cdot OB} \\
&= \frac{1^2 + 1^2 - (2r)^2}{2\times 1\times 1} \\
&= 1 - 2r^2
\end{aligned}$$

また、三角形 OBC は $\angle BOC = 90^\circ$ の直角三角形である。三角形 OAC にも余弦定理を使うと、$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{r^2+1}$ より

$$\begin{aligned}
\cos\angle AOC &= \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2\ OA\cdot OC} \\
&= \frac{1^2 + \sqrt{3}^2 - (2\sqrt{r^2+1})^2}{2\times 1\times\sqrt{3}} \\
&= -\frac{2r^2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOB \\
&= 1\times 1\times(1 - 2r^2) \\
&= \mathbf{1} - \mathbf{2}r^2 \\
\vec{b}\cdot\vec{c} &= \mathbf{0} \\
\vec{a}\cdot\vec{c} &= 1\times\sqrt{3}\times -\frac{2r^2}{\sqrt{3}} \\
&= -\mathbf{2}r^2
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\\ &= -\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN} &= \left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &= \frac{1}{2}(1-2r^2)-\frac{1}{4}\times(-2r^2)-\frac{1}{4}\times 1^2\\ &= -\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

直線 AM と直線 MN が垂直になるとき、$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ である。このとき

$$-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{4}=0 \ \Rightarrow\ r=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ AB=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\mathbf{2}}$$

となる。