

数学 2 B

第 6 問

n を 2 以上の自然数とし、以下の操作を考える。

- (i) n が偶数ならば、 n を 2 で割る。
- (ii) n が奇数ならば、 n を 3 倍して 1 を加える。

与えられた 2 以上の自然数にこの操作を行い、得られた自然数が 1 でなければ、得られた自然数にこの操作を繰り返す。2 以上 10^5 以下の自然数から始めると、この操作を何回か繰り返すことで必ず 1 が得られることが確かめられている。たとえば、10 から始めると

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

である。ただし、 $a \rightarrow b$ は 1 回の操作で自然数 a から自然数 b が得られたことを意味する。

N を 2 以上 10^5 以下の自然数とするとき、 $F(N)$ を N から始めて 1 が得られるまでの上記の操作の回数と定義する。また $F(1) = 0$ とおく。たとえば、上の例から、 $F(10) = 6$ である。

(1) $F(6) = (\text{ア})$, $F(11) = (\text{イウ})$ である。

(2) 10^5 以下の自然数 N について、 $F(N)$ を求めるため、次のような [プログラム] を作った。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

[プログラム]

```
100 INPUT N
110 LET I = N
120 LET C = 0
130 IF I = 1 THEN GOTO (工)
140 IF INT(I/2)*2 = I THEN
150     (オ)
160     GOTO 190
170 END IF
180 LET I = 3*I + 1
190 (力)
200 (キ)
210 PRINT "F(";N;")=";C
220 END
```

(工) に当てはまるものを、次の 0. ～ 5. のうちから一つ選べ。

0. 130 1. 140 2. 150 3. 190 4. 200 5. 210

(オ), (力), (キ) に当てはまるものを、次の 0. ～ 8. のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

0. LET C = 1	1. GOTO 130	2. GOTO 140
3. GOTO 210	4. LET C = C + 1	5. LET I = I + 1
6. LET I = I/2	7. NEXT N	8. LET I = 2*I + 1

〔プログラム〕を実行して、N に 24 を入力すると、180 行は (ク) 回実行される。

(3) M を 10^5 以下の自然数とする。(2) で作成した〔プログラム〕を変更して、 M 以下の自然数 N のうち、 $F(N) \leq 10$ となるすべての N について、 $F(N)$ の値を出力するプログラムを作成する。そのために、まず、〔プログラム〕の 100 行を次の二つの行で置き換える。

```
100 INPUT M
101 FOR N = 1 TO M
```

さらに、210 行を次の二つの行で置き換える。

```
210 IF (ケ) THEN PRINT "F(";N;")=";C
211 (コ)
```

(ケ) に当てはまるものを、次の 0. ～ 5. のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

0. $\text{INT}(I/2) = I$ 1. $C > 10$ 2. $M \geq C$
3. $N = I$ 4. $C \leq 10$ 5. $I = N$

(コ) に当てはまるものを、次の 0. ～ 5. のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

0. $\text{LET } M = M + 1$ 1. $\text{GOTO } 120$ 2. $\text{NEXT } M$
3. $\text{NEXT } N$ 4. $\text{LET } C = C + 1$ 5. $\text{NEXT } I$

変更後のプログラムを実行して、 M に 10 を入力すると、210 行の PRINT 文は (サ) 回実行される。

(1) 操作にしたがって、 $N = 6$, $N = 11$ の場合を調べると、以下の通りになる。

$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16$
 $\rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

よって $F(6) = 8$, $F(11) = 14$ である。

(2) 〔プログラム〕の各行の内容は以下の通りである。

```
100 自然数 N を入力する。
110 操作を行うための変数として I を使う。初めに  $I = N$  とする。
120 操作の回数をあてる変数として C を使う。初めに  $C = 0$  とする。
130  $I = 1$  であれば、操作は行う必要がないため、 $F(N)$  を出力して終了。
140  $I$  が偶数であるか ( $\text{INT}(I/2)*2 = I$  であるか) の判定を行う。
150   ( $I$  が偶数であるときの操作を行う。 )
160   190 行へ移る。
170  $I$  が偶数であるときの操作が終了。
180  $I = 3*I + I$  ( $I$  が 1 以外の奇数であるときの操作) とする。
190 操作の回数が 1 回増えたことを記録する。
200  $I = 1$  であることの判定をする。
210  $F(N)$  を出力する。
```

220 プログラム終了

以上のことから

(工) = 5. 210

(オ) = 6. LET I = I/2

(力) = 4. LET C = C+1

であることがわかる。また、200 行については 130 行で $I = 1$ であることの判定を行っているため、その行に移るプログラムを入れる。つまり (キ) = 1. GOTO 130 となる。

〔プログラム〕を実行して、N に 24 を入力すると、以下の操作が行われる。

$24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

180 行の操作は I が 1 以外の奇数であるときの操作である。上の中で 1 以外の奇数は 3, 5 の 2 個のみであるため、180 行は 2 回実行される。

(3) M を 10^5 以下の自然数とする。(2) で作成した〔プログラム〕を変更して、 M 以下の自然数 N のうち、 $F(N) \leq 10$ となるすべての N について、 $F(N)$ の値を出力するプログラムを作成する。

置き換わった〔プログラム〕の 100, 101 行の内容は以下の通り

100 自然数 M を入力する。

101 $N = 1$ から M まで、110 行以下の操作を行う。

110 行以下はこれまでと同じく $F(N)$ を求めるプログラムである。次に置き換わった〔プログラム〕の 210 行の内容は以下の通り

210 (ケ) の条件を満たせば $F(N)$ を出力する。

ここでは $F(N) \leq 10$ であれば $F(N)$ を出力するため、(ケ) には 4. $C \leq 10$ が当てはまる。

101 行で変数 N に関する FOR 文が使われているため、101 行に対応した変数 N に関する NEXT 文を入れる必要がある。つまり (コ) には 3. NEXT N が当てはまる。

M に 10 を入力したとき、210 行の PRINT 文は $F(N) \leq 10, N \leq 10$ を満たす自然数の個数と同じである。

(2) の N に 24 を入力したときの操作の流れから

$F(1) = 0$

$F(2) = 1$

$F(3) = 7$

$F(4) = 2$

$F(5) = 5$

$F(6) = 8$

$F(8) = 3$

$F(10) = 6$

であることがわかる。N に 9 を入力したときの操作は以下の通りになる。

9 → 28 → 14 → 7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13
→ 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 この
ことから

$F(7) = 16$

$F(10) = 19$

となり、ともに $F(N) \leq 10$ の条件を満たさない。よって 210 行の PRINT 文は 8 回実行されることがわかる。