2012年度センター試験　数学1

第1問

［1］

（1）不等式 $|\,2x+1\,| \leq 3$ の解は $\boxed{アイ} \leq x \leq \boxed{ウ}$ である。

以下 a を自然数とする。

(2) 不等式

$$|2x+1| \leq a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は $\dfrac{-\boxed{エ}-a}{\boxed{オ}} \leq x \leq \dfrac{-\boxed{エ}+a}{\boxed{オ}}$ である。

(3) 不等式 ① を満たす整数 x の個数を N とする。$a=3$ のとき、N $=\boxed{カ}$ である。また、a が $4,5,6,\cdots$ と増加するとき、N が初めて $\boxed{カ}$ より大きくなるのは $a=\boxed{キ}$ のときである。

---

(1)　$|\,2x+1\,| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x+1 \leq 3$

$$\Rightarrow \mathbf{-2} \leq x \leq \mathbf{1}$$

以下、a を自然数とする。

(2)　$|\,2x+1\,| \leq a \Rightarrow -a \leq 2x+1 \leq a$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{-1}-a}{\mathbf{2}} \leq x \leq \frac{\mathbf{-1}+a}{\mathbf{2}}$$

(3)　$a=3$ のとき、不等式 ① の解は $-2 \leq x \leq 1$ であるため、① を満たす整数は

$x = -2,\ -1,\ 0,\ 1$

となり、N $=$ **4**

$a=4$ のとき、不等式 ① の解は $-5/2 \leq x \leq 3/2$ であるため、① を満たす整数は $a=3$ のときと同じものである。つまり、N $=4.$
$a=5$ のとき、不等式 ① の解は $-3 \leq x \leq 2$ であるため、① を満たす整数は

$$x = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

となり、N $=6.$ 以上から N が初めて 4 より大きくなるのは $a = \mathbf{5}$ のときである。

---

［2］ a, b を実数として、２次方程式

$$(x-a)^2+4(x-a)+b=0$$

を考える。
下の $\boxed{ク}$、$\boxed{ス}$ には次の ⓪～⑤ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$ ① $<$ ② $\geq$ ③ $\leq$ ④ $=$ ⑤ $\neq$

この 2 次方程式が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$b \ \boxed{ク} \ \boxed{ケ}$$

が成立することである。その二つの解を s、t とすれば

$$b=\frac{\boxed{コサ}-(s-t)^2}{\boxed{シ}}$$

である。さらに s、t がともに正となる条件は

$$a \ \boxed{ス} \ \boxed{セ} \ +\sqrt{\boxed{ソ}-b}$$

が成立することである。

この2次方程式が異なる実数解をもつ条件は、判別式が正である

$$(x-a)^2+4(x-a)+b=x^2+(4-2a)x+a^2-4a+b$$

より

$$(4-2a)^2-4(a^2-4a+b)=16-4b>0 \quad \Rightarrow \quad b<\mathbf{4}$$

この2次方程式の2つの解を s、t とすれば、解と係数の関係から

$$\begin{array}{ccc} s+t & = & -4+2a \\ st & = & a^2-4a+b \end{array}$$

が成り立つ。ここで

$$st=\frac{(s+t)^2-(s-t)^2}{4}$$

が成り立つことから

$$a^2-4a+b=\frac{(-4+2a)^2-(s-t)^2}{4}$$
$$\Rightarrow\ b=\frac{\mathbf{16}-(s-t)^2}{\mathbf{4}}$$

$$s,t \text{ がともに正} \ \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcc} s+t=2a-4 & > & 0 \\ st=a^2-4a+b & > & 0 \end{array}$$

$2a-4>0 \Rightarrow a>2$ であり、異なる実数解をもつ条件から
$4-b>0$ でもある。また

$$a^2-4a+b=(a-2)^2+b-4>0$$

$\Rightarrow a < 2 - \sqrt{4 - b}$ または $2 + \sqrt{4 - b} < a$

前の 2 つの条件から s、t がともに正となる条件は

$$a > \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{4} - b}$$

である。