2012年度センター試験　数学1

第2問

$a,\ b$ を定数として2次関数

$$y = -x^2 + (2a+4)x + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える。関数 ① のグラフ G の頂点の座標は

$$(a + \boxed{ア},\ a^2 + \boxed{イ}a + b + \boxed{ウ})$$

である。以下、この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとする。このとき

$$b = -a^2 - \boxed{エ}\ a - \boxed{オカ}$$

である。

(1) グラフ G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$$

である。また、G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$$-\boxed{コ} - \sqrt{\boxed{サ}} < a < -\boxed{コ} + \sqrt{\boxed{サ}}$$

である。

(2) 関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最小値が -22 となるのは

$$a = \boxed{シス} \text{ または } a = \boxed{セ}$$

のときである。また $a = \boxed{セ}$ のとき、関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最大値は $\boxed{ソタチ}$ である。

一方、$a = \boxed{シス}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に、y 軸方向にだけ平行移動すると、$a = \boxed{セ}$ のときのグラフと一致する。

関数 ① の右辺を変形すると

$$
\begin{aligned}
-x^2+(2a+4)x+b &= -\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2+b \\
&= -\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4
\end{aligned}
$$

となるため、① のグラフ G の頂点の座標は

$$(a+\mathbf{2}\ ,a^2+\mathbf{4}\,a+b\ +\mathbf{4}\ )$$

である。

この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるとき

$$
\begin{aligned}
a^2+4a+b+4 &= -4(a+2)-1 \\
\Rightarrow \qquad b &= -a^2-\mathbf{8}\,a-\mathbf{13}
\end{aligned}
$$

以下、上の条件が成り立つものとする。

(1) グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるとき、関数 ① の右辺の式に対する 2 次方程式の判別式が正の値を持つ。判別式は

$$
\begin{aligned}
(2a+4)^2-4\times(-1)\times b &= 4\{(a^2+4a+4)-a^2-8a-13\} \\
&= -4(4a+9)
\end{aligned}
$$

となるため、条件を満たす a の範囲は

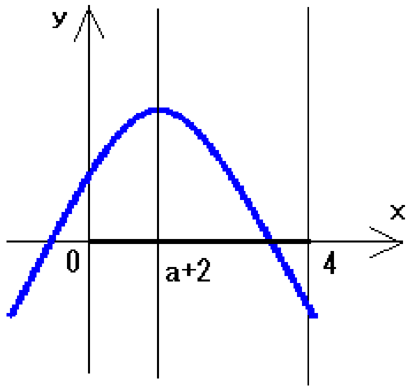
$$-4(4a+9)>0 \ \Rightarrow\ a< \frac{\mathbf{-9}}{\mathbf{4}}$$

また、G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるとき、x^2 の係数が負であるため $x=0$ のときの y 座標 $b=-a^2-8a-13$ が正である。よって条件を満たす a の範囲は

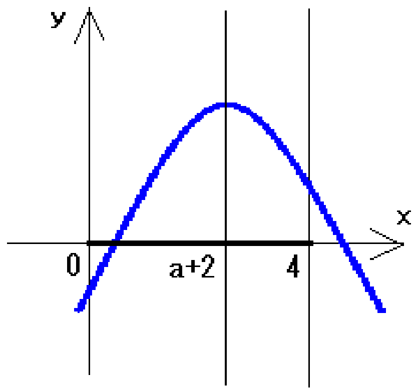
$$-a^2-8a-13>0 \Rightarrow -\mathbf{4}-\sqrt{\mathbf{3}}<a<-4+\sqrt{3}$$

(2) 関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最小値について

$a+2 \leq 2 \Rightarrow a \leq 0$ のとき、$x=4$ で最小値をとる。
$a+2>2 \Rightarrow a>0$ のとき、$x=0$ で最小値をとる。



a+2≦2 のときのグラフ



a+2＞2 のときのグラフ

$a \leq 0$ のときの最小値は

$$-4^2+(2a+4)\times 4-a^2-8a-13$$
$$=-a^2-13$$

この値が -22 となるとき

$$-a^2-13=-22 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

$a \leq 0$ より $a=\mathbf{-3}$

$a>0$のときの最小値は $-a^2-8a-13$. この値が -22 となるとき

$$-a^2-8a-13=-22 \Rightarrow a^2+8a-9=0$$
$$\Rightarrow a=-9,1$$

$a>0$ より $a=\mathbf{1}$

$a=1$ のとき関数 ① は

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2+6\,x-22 \\
&= -(x-3)^2-13
\end{aligned}
$$

となるため、$0 \leq x \leq 4$ における最大値は $x=13$ のときの $\mathbf{-13}$ である。

$a=-3$ のとき関数 ① は

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2-2\,x+2 \\
&= -(x+1)^2+3
\end{aligned}
$$

となる。$a=-3,1$ のときの関数 ① のグラフの頂点の座標はそれぞれ $(-1,3)$, $(3,-13)$ である。二つの関数は x^2 の係数が等しいため、頂点を平行移動して一致させれば、グラフも一致できる。

以上から $a=\ -3$ のときのグラフを x 軸方向に $3-(-1)=\mathbf{4}$、y 軸方向に $-13-3=\mathbf{16}$ だけ平行移動すると、$a=1$ のときのグラフと一致する。