

2012 年度センター試験 数学 1

第 3 問

$\triangle ABC$ において、 $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = \sqrt{3}$, とする。このとき
 $\angle BAC = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるから

$$\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad \cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

$\angle BAC$ の三等分線と辺 BA との交点を、点 B に近いほうから順に、点 M, N とする。

(1) $\triangle ABC$ において、点 M から辺 AB に垂線を引くと

$$\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} AM = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}} BM$$

であり、

$$AB = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}} AM + \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} BM$$

である。よって

$$AM = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad BM = \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

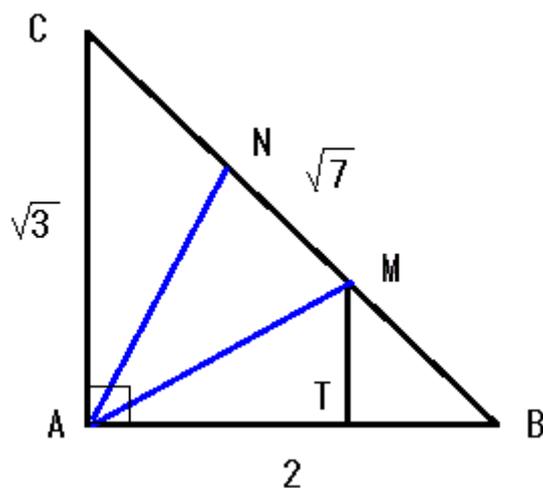
である。

(2) $\triangle AMN$ と $\triangle ANC$ について、 $\triangle AMN$ の面積は $\frac{\sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}} AN$ であり、 \triangle

ANC の面積は $\frac{\sqrt{\text{ナ}}}{\text{ニ}} AN$ である。

また、 $\triangle AMC$ の面積は $\frac{\text{ヌ}\sqrt{\text{ネ}}}{\text{ノ}}$ であるから、 $AN = \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$ である。

$\triangle ABC$ の 3 辺の長さから $BC^2 = AB^2 + AC^2$ が成り立つため、 $\angle BAC = 90^\circ$ よって



$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \quad \cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

(1) AM , AN は $\angle BAC$ の三等分線であるため、

$$\angle BAM = \angle MAN = \angle NAC = 30^\circ$$

M から AB に垂線をおろし、AB との交点を T とすると。

$$MT = BM \times \sin \angle ABC = AM \times \sin \angle BAM \Rightarrow \frac{1}{2} AM = \frac{\sqrt{21}}{7} BM$$

また

$$\begin{aligned} AB &= AT + TB \\ &= AM \times \cos \angle BAM + BM \times \cos \angle ABC \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} AM + \frac{\sqrt{3}}{2} BM \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} AM + \frac{\sqrt{21}}{7} BM \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6} AM \end{aligned}$$

よって

$$\Rightarrow AM = \frac{4\sqrt{3}}{5}, \quad BM = \frac{7}{\sqrt{21}} \times \frac{1}{2} \times AM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

(2) $\triangle AMN$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AM \times AN \times \sin \angle NAM &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{5} \times AN \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{5} AN \end{aligned}$$

$\triangle ANC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AN \times AC \times \sin \angle NAC &= \frac{1}{2} \times AN \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} AN \end{aligned}$$

$\triangle AMC$ の面積は $\angle MAC = \angle NAM + \angle NAC = 60^\circ$ より

$$\frac{1}{2} \times AM \times AC \times \sin \angle MAC = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{5} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

$\triangle AMN$, $\triangle ANC$ を合わせると $\triangle AMC$ になるため、

$$\frac{\sqrt{3}}{5}AN + \frac{\sqrt{3}}{4}AN = \frac{3\sqrt{3}}{5} \Rightarrow AN = \frac{4}{3}$$